Verônica Gitirana
Rosinalda Teles
Paula Moreira Baltar Bellemain
Airton Temistocles de Castro
Iolanda Campos
Paulo Figueiredo Lima
Franck Bellemain

(Organizadores)

Jogos com Sucata na Educação Matemática

Projeto Rede





Jogos com Sucata na Educação Matemática

Verônica Gitirana Rosinalda Teles Paula Moreira BaltarBellemain Airton Temistocles de Castro Iolanda Campos Paulo Figueiredo Lima Franck Bellemain (Organizadores)

Jogos com Sucata na Educação Matemática

NEMAT Núcleo de Educação Matemática Centro de Educação



Copyright © Organizadores Copyright © NEMAT-UFPE

PROJETO REDE - "Formação docente: interdisciplinaridade e ação docente"

Coordenação: Ana Cláudia Gonçalves Vice-Coordenação: Rosinalda Teles

SUBPROJETO – "Elaboração de Material e formação para o trabalho com elaboração e uso de jogos e materiais concretos para a aprendizagem da matemática a partir de sucatas e materiais de baixo custo"

Coordenação: Verônica Gitirana

FINANCIAMENTO

FNDE - Fundação Nacional de Desenvolvimento Educacional

PROMOCÃO

NEMAT - Núcleo de Educação Matemática

CEEL - Centro de Estudos em Educação e Linguagem

UFPE - Universidade Federal de Pernambuco

CAPA

Nielso Cândido de Oliveira Júnior

ILUSTRAÇÃO

Foto e imagens de arquivo dos autores

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA



Catalogação na fonte: Bibliotecária Kalina Ligia França da Silva, CRB4-1748

J64 Jogos com sucata na educação matemática [recurso eletrônico] / organizadores: Verônica Gitirana... [et al.]. – Recife : NEMAT : Ed. UFPE. 2018.

Inclui anexos. Inclui referências bibliográficas. ISBN 978-85-415-1001-1 (online)

Jogos no ensino de matemática.
 Jogos educativos.
 Matemática – Estudo e ensino.
 Ferreira, Verônica Gitirana Gomes (Org.).

371.337 CDD (23.ed.)

UFPE (BC2018-028)

INTRODUÇÃO

Os jogos estão presentes no dia a dia da criança, fazem parte do início de suas vidas e de suas formas de diversão.

Qual criança nunca jogou amarelinha?

Diferentes jogos têm sido identificados a partir da realidade social de cada criança. Muitas vezes, o jogo é um importante canal de inserção da criança no mundo escolar.

Toda essa articulação com a motivação, a vida social, tem sido indicada como bom elemento para se aproveitar o jogo como um elemento didático, em particular, para o ensino da Matemática.

Ideias e relações matemáticas importantes estão presentes numa enorme variedade de jogos e por meio destes é possível um contato inicial e estimulante com tais ideias.

Este livro traz os resultados de um curso de formação de professores para o uso de jogos na educação matemática confeccionados com sucatas, realizado entre 2011 e 2012, no âmbito do Projeto Rede "Formação Docente: interdisciplinaridade e ação docente". Tal projeto foi desenvolvido com o financiamento do FNDE (Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação), em uma parceria do NEMAT (Núcleo de Educação Matemática da UFPE) com o CEEL (Centro de Estudos em Educação e Linguagem da UFPE).

No curso, propôs-se não somente o uso de jogos, mas também que eles fossem confeccionados a partir de material reciclável ou de baixo custo. Três razões nos levaram a tal decisão. Primeiro, romper com a ideia de kits didáticos fechados e trancados com receio de perda de peças e destruição dos mesmos. Cada professor pode fazer seu kit, cada aluno também pode fazer e ter o seu. Segundo, propiciar uma discussão da formação da consciência sobre o reaproveitamento de materiais. Terceiro, mas não menos importante, permitir que a elaboração do material do jogo possa ser feita como uma atividade matemática. Para elaborar um tabuleiro tipo damas, por exemplo, lidam-se

com figuras como o quadrado, com paralelismo e perpendicularidade de segmentos de retas, e com sua obtenção a partir de um papelão. Além disso, problemas relativos às medidas de cada casa e ao tamanho da peça podem ser um excelente momento para se discutir figuras inscritas.

Papéis dos Jogos no Ensino da Matemática

Por que usar jogos no Ensino da Matemática?

Esta tem sido uma questão levantada com diversas justificativas. Este texto introdutório busca trazer subsídios que justifiquem a pertinência desse recurso. Muitos podem argumentar que o jogo só faz ocupar a aula de Matemática. Joga-se e depois se estuda Matemática. O ponto de vista adotado aqui é diferente. Considera-se que os jogos matemáticos podem desempenhar um papel relevante na sala de aula de matemática, no pátio da escola, no laboratório de matemática e em casa.

Como já mencionado anteriormente, muitos jogos incluem ideias matemáticas que podem ser aproveitadas como ponto de partida para o ensino. Ao brincar de par ou ímpar, por exemplo, uma criança pequena já inicia um primeiro contato com a ideia de paridade do número que pouco a pouco pode ser recuperada e articulada com a divisibilidade por dois.

Outro aspecto importante é que a busca por estratégias para a vitória ou para solucionar um desafio inclui, via de regra, uma variedade de questões de lógica ou matemática que vão do nível mais elementar até problemas ainda não resolvidos pelos especialistas. Este fato possibilita a exploração de um mesmo jogo em diversos níveis, dependendo do estágio dos participantes.

Além disso, muitos dos jogos propiciam a integração natural entre vários campos da Matemática Escolar – Números e Operações, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Estatística, etc., dando oportunidade, assim, para que seja trabalhada uma das mais ricas características dessa ciência.

Do ponto de vista pedagógico, é fundamental o aspecto interativo propiciado pela experiência com jogos. As pessoas não ficam na posição de meras

observadoras, tomando conhecimentos de novos fatos; os participantes de um jogo transformam-se em elementos ativos, na tentativa de ganhar a partida ou na busca de um caminho para a solução do problema posto à sua frente. Tal atitude é extremamente positiva para a aprendizagem das ideias matemáticas subjacentes aos jogos.

Além das ideias matemáticas, o desenvolvimento de atitudes importantes para a aprendizagem da matemática pode ser propiciado ao se jogar. A vitória numa partida ou a descoberta da solução de um desafio são experiências relevantes para fortalecer a autoconfiança, indispensável ao processo de aprendizagem. Os jogos favorecem o desenvolvimento da autonomia cognitiva e afetiva, uma vez que as decisões são tomadas na busca de estratégias que conduzam à vitória ou ao enfrentamento do desafio que está posto e não para satisfazer desejos ou demandas externos. Além disso, as mudanças de estratégia são motivadas pela observação que os jogadores fazem acerca da pertinência ou não da estratégia para atingir o objetivo do jogo. Se uma estratégia não se mostra eficiente ou confiável, os jogadores buscam outra maneira de enfrentar o desafio posto. É bom notar, em contrapartida, que as derrotas repetidas e os insucessos frequentes diante dos desafios podem levar a frustrações e reforçar a ideia de incapacidade para compreender os fatos na área da Matemática. Por isso, é necessária uma reflexão constante sobre a adequação do jogo à faixa etária a que se destina, bem como às características de cada turma.

Tem sido muito frequente nos últimos anos a ênfase dada, nos trabalhos voltados para o ensino-aprendizagem da Matemática, à questão da resolução de problemas. Verdade é que essa Ciência cresce e se aprofunda alimentada por uma profusão de problemas, originários de outras ciências ou criados dentro do próprio edifício da Matemática. Assim, nada mais apropriado a uma perspectiva construtiva do saber matemático do que aquela que privilegia a problematização permanente e sistemática. Os jogos matemáticos fornecem uma excelente oportunidade para que sejam explorados aspectos importantes dessa problematização. Como exemplo, lembramos que a observação precisa dos dados, a identificação das regras, a procura de uma estratégia, o emprego de analogias, a redução a casos mais simples, a variação das regras, etc., são

indicações contidas na chamada "Heurística do Pólya" e podem ser exercitadas de forma natural nos jogos.

Além disso, o contato com os jogos auxilia a integração da criança com o grupo e a negociação de regras a serem seguidas. Tudo isto propicia uma boa discussão de questões da vida em sociedade. As regras de jogos e os algoritmos matemáticos muitas vezes têm o mesmo princípio: são regras a serem seguidas no desenvolvimento de uma atividade, no primeiro caso, jogar, no segundo realizar uma tarefa matemática. Em geral, chegam a identificar diferentes situações que devem ser analisadas e caminhos diferentes que podem ser tomados.

Do Jogo Matemático ao Jogo para o Ensino da Matemática

Jogos!!! O que vem a ser um jogo? Ao pensarmos em Jogos Matemáticos, muitas questões podem ser formuladas. Dentre elas, uma questão inicial impulsionou a elaboração dos jogos que serão trabalhados ao longo desse curso: jogo matemático ou jogo didático sobre conteúdos matemáticos? Aqui buscaremos identificar alguns tipos importantes de jogos, e depois discutiremos o seu aproveitamento didático.

Muitos dos jogos que podemos chamar de matemáticos têm vida própria e fazem parte das atividades recreativas das pessoas, fora do contexto escolar ou são típicos de algumas culturas. Por outro lado, alguns deles são criações bastante elaboradas de especialistas e sua completa exploração matemática ultrapassa os limites da escola do Ensino Fundamental.

A denominação genérica "jogos matemáticos" pretende englobar situaçõesproblema de vários tipos:

 Jogos que envolvem disputa entre duas pessoas ou entre pares, incluindo os clássicos e suas variações, bem como recentes criações de estudiosos na área. Como exemplo, citam-se o xadrez, o jogo de damas e outros jogos com tabuleiro e peças variadas, o jogo do Nim, o jogo do Hex, o jogo de "Fazer a Ponte".

- Jogos em que se joga sozinho como quebra-cabeça de montagem ou movimentações de peças, tais como o Tangram, os de composição e decomposição de figuras planas ou espaciais, os Poliminós de Golomb, o cubo húngaro e suas variantes.
- Desafios, enigmas, paradoxos, formulados em linguagem do cotidiano e que requeiram raciocínio lógico para serem desvendados, como o jogo "Quem dirá vinte?" estudado pelo pesquisador francês Guy Brousseau.

Há ainda importantes jogos sobre conhecimentos matemáticos embutidos no mesmo. São jogos de trilha com casas que apresentam desafios matemáticos, gincanas matemáticas em que grupos disputam entre si a partir da resolução de problemas matemáticos. Nesses casos, o conhecimento matemático é explícito e o aluno deve utilizá-lo para ganhar pontos. Para esses, é importante sempre verificar até que ponto o mesmo motiva os alunos a encará-los como um jogo e não como uma tarefa matemática enfadonha. Alguns deles facilmente motivarão e envolverão alunos a jogar, já outros não.

Jogo como Material Didático

Em algumas escolas, os jogos são utilizados essencialmente para ocupar os alunos que concluem as tarefas antes dos outros. No entanto, vamos defender aqui o jogo como elemento importante no currículo da Matemática.

O problema a encarar é como inserir, então, no contexto da Educação Básica, as experiências com jogos matemáticos. Esta não é uma tarefa fácil, requerendo de um lado, a clareza sobre os vários conceitos matemáticos envolvidos e, de outro, um planejamento do momento e da maneira adequados à sua utilização no processo do ensino-aprendizagem, garantindo-se, assim, a riqueza conceitual, o prazer em participar da atividade e a conquista da autoconfiança.

São múltiplas as funções que diferentes jogos podem assumir. Os jogos podem ser bons contextos para se estudar conhecimentos matemáticos. O jogo do Nim, por exemplo, é um bom exemplo da aplicação e aprofundamento de

estratégias ligadas ao estudo da combinatória. Outras funções dos jogos podem ser exemplificadas: (a) para motivar a introdução de conceitos, como é o caso do jogo de par ou ímpar para introduzir a ideia de números pares; (b) para aprofundar conhecimentos, como o jogo do Tangram para aprofundar ideias de frações; (c) para treinar estratégias matemáticas, como é o caso da Torre de Hanói; (d) para desenvolver e agilizar habilidades e estratégias, como é o caso do Sudoku; (e) para desenvolver atitudes matemáticas, como é o caso de todos os jogos em equipe.

Em algumas situações, a percepção de tarefa matemática é tão grande que os alunos não se motivam. Portanto, a mesma não chega a ser encarada pelos alunos como um jogo, perdendo o lado prazeroso. O jogo deve estimular o espírito de investigador dos alunos, não deve ser repetitivo e deve possibilitar a criação de regras pelos próprios alunos. Os jogos devem fazer parte da rotina escolar, de modo que os alunos sintam-se estimulados a utilizar os jogos fora do ambiente da sala de aula: no recreio, em casa, etc. O jogo deve privilegiar o aspecto interativo e oferecer possibilidade de ser vivenciado fora da escola. Se, ao criar um jogo matemático, seus alunos o levarem para fora do ambiente de sala de aula, pode ter certeza de ser um jogo motivador.

Outro aspecto importante é a dinâmica de uso do jogo como recurso didático. É preciso que o aluno vivencie o jogo como jogo, podendo posteriormente ser analisadas estratégias e conteúdos matemáticos. No entanto, em alguns casos, este estudo é feito durante o próprio jogo.

O Jogo e não o Jogo de Azar

Outro aspecto que precisa ser discutido quando se trata de jogo na educação, em particular na Educação Matemática é a relação entre Jogo didático e Jogo de Azar. Essa relação envolve questões éticas importantes quando se considera a formação de cidadãos. Isto é ainda mais polêmico quando se utilizam jogos que estão ligados a tradicionais jogos de azar como o bingo. Segundo o parágrafo 3 do Decreto-Lei Número 3688/41:

Consideram-se, jogos de azar: a) o jogo em que o ganho e a perda dependem exclusiva ou principalmente da sorte; b) as apostas sobre corrida de cavalos fora de hipódromo ou de local onde sejam autorizadas; c) as apostas sobre qualquer outra competição esportiva.

Nesses tipos de jogos geralmente há apostas cujos prêmios dependem da probabilidade de acerto.

A discussão é importante, pois a escola não é um local para se induzir o aluno ao vício do jogo como forma de apostas. No entanto, o jogo em si, não se constitui em jogo de azar. O bingo pode ser jogado sem ligações com elementos de apostas e não depender apenas de sorte, pois pode ser utilizado para o aluno reconhecer diferentes representações de um mesmo número ou de um mesmo sólido geométrico, por exemplo. Por outro lado, qualquer jogo ou mesmo situação real pode ser utilizada socialmente como contexto para as apostas. Quem não ouviu falar nos bolões realizados por pessoas apostando em quem ganhará uma eleição? Transforma-se uma situação política importante como uma eleição, em um elemento a se apostar.

É nesse sentido, que indicamos o uso dos jogos, sem motivar apostas financeiras. De fato, não faz sentido, para o ensino da matemática, estimular os jogos que dependem apenas da sorte. O bingo, por exemplo, pode ser utilizado, com algumas modificações tornando-se um elemento que deixe de ser apenas ligado a sorte ou azar. A sua transformação em jogo de azar é que deve ser evitada.

O Local dos Jogos na Escola

Laboratório de matemática não é realidade em todas as escolas, portanto, os jogos devem oferecer a possibilidade de serem utilizados em qualquer ambiente, em qualquer espaço físico. Os jogos sugeridos nesse curso foram pensados para possibilitar seu uso na sala de aula, como também estimular a confecção pelos alunos para que cada um possa ter seu jogo e levá-lo para sua casa, se assim o desejar.

Por outro lado, é evidente que, na medida das possibilidades do espaço físico da escola, é bastante positivo criar um espaço voltado à Matemática, no qual podem ficar expostos alguns jogos ou outras produções de alunos e professores da escola. Nesse espaço, professores e crianças de diferentes turmas podem se encontrar para jogar. Além disso, a confecção de alguns jogos é facilitada por um espaço físico amplo, mesas adequadas e, como já foi dito, a própria confecção dos jogos envolve o lidar com ideias matemáticas que contribuem para a formação dos alunos.

Se a escola não possui laboratório de matemática, podem-se fazer adaptações, como utilizar algum espaço da escola, como um pátio coberto ou a biblioteca da escola ou ainda, afastar as cadeiras da sala de aula e criar um espaço no chão para fabricar os jogos, se for necessário.

À medida que os jogos matemáticos são integrados na vivência cotidiana das escolas, pode-se pensar, pouco a pouco, na possibilidade de lhe atribuir um espaço próprio. A criação de um laboratório de matemática, clube de matemática ou sala ambiente de matemática na escola é um passo importante. Mas, por outro lado, é preciso que não se transforme no único espaço da escola onde esse recurso está presente.

Se a escola dispõe de um laboratório de matemática, seu uso deve ser integrado em um conjunto de ações que envolvem jogos, nos vários espaços do ambiente escolar e se ramificando para as residências das crianças.

Conclusão

Diante de tudo o que foi discutido acima, entendemos que os jogos matemáticos têm um grande potencial catalisador do prazer de aprender matemática, enfrentando desafios e acreditando na sua capacidade de aprender com eles. Estamos dispostos a explorar esse potencial juntos. Para isso convidamos o leitor a jogar, a refletir sobre os jogos, suas características, suas possibilidades de exploração, estratégias que levam à vitória ou à derrota, conteúdos matemáticos envolvidos, possibilidades de aprendizagem oferecidas, modificações possíveis e suas consequências.

Acreditamos que a escolha de priorizar materiais reciclados é também um fator importante. Para isso, fizemos uso de muita criatividade e desenvolvemos a atenção ao que pode ser reaproveitado. Jogos caros e sofisticados nem sempre são ricos do ponto de vista de sua contribuição para a formação dos alunos. É possível fazer muito, com um baixo custo e o esforço de pensar, elaborar e fabricar os jogos já faz parte do processo de construção das ideias matemáticas envolvidas.

Os formadores e cursistas desse projeto participaram conosco dessa aventura, na qual novas possibilidades se descortinaram, quando enfrentamos coletivamente os desafios que cada jogo nos propõe e o grande desafio de compartilhar com nossos alunos a riqueza e a beleza da Matemática redescoberta brincando e jogando. Esperamos que os frutos dessa experiência continuem a brotar nas salas de aula e sejam úteis para os leitores desse texto e seus alunos.

Esta obra está organizada da seguinte forma. Uma primeira unidade traz 8 jogos desenvolvidos para o ensino da matemática elementar. Buscou-se contemplar nos jogos um histórico, suas regras, uma discussão didática para uso e sobre escolhas em sua elaboração. Há ainda atividades elaboradas tendo o jogo como contexto. E, por fim, discutem-se modificações que já foram feitas, o que amplia o quantitativo de jogos.

Uma segunda unidade concentra uma discussão sobre modelagem como metodologia de ensino da matemática, com foco na atividade de confecção do jogo com material de sucata como problema para modelagem.

ALGUNS JOGOS

Nesta primeira parte, são apresentados os jogos elaborados e/ou estudados no âmbito do Projeto Jogos Matemáticos com Sucata. Alguns desses jogos são adaptações de jogos tradicionais. Optamos por apresentá-los na ordem em que foram trabalhados no curso. Cada capítulo diz respeito a um jogo, com sua descrição, seu histórico, suas regras e materiais necessários à confecção, bem como a análise didática que justifica as escolhas feitas no jogo. Há também variações quanto aos conteúdos presentes no jogo, ora voltados mais para a geometria ora para os números e operações, ora para grandezas e medidas.

Assim, no capítulo 1, apresenta-se o *Jogo da Velha com Figuras Geométricas*, inspirado tanto no tradicional *Jogo da Velha* como no material didático estruturado Blocos Lógicos. No capítulo 2 apresenta-se o **Mankala Colhe Três**, o qual é baseado no Jogo da Mankala presente em culturas milenares. O capítulo 3 traz o **Jogo dos Polígonos**, o qual partindo do jogo de batalha naval propõe uma exploração de figuras geométricas e suas propriedades. No capítulo 4 propõem-se explorações do **Jogo do NIM**, o qual é uma referência incontornável para quem discute jogos em educação matemática. No capítulo 5 é apresentado o **Jogo dos Sinais** que permite uma iniciação intuitiva aos números inteiros relativos. O capítulo 6 é dedicado ao **Bingo dos Números Racionais**, o qual consiste em uma adaptação do jogo no Bingo no qual está em foco a pluralidade de representações para os números racionais. O capítulo 7 é dedicado ao **Desafio das Operações**. No capítulo 8 é explorado o *Bingo das Grandezas e Medidas*, o qual é mais uma adaptação do jogo do bingo, mas dessa vez voltada para o campo das Grandezas e Medidas.

Capítulo I

Jogo da Velha com Figuras Geométricas

José Idelmo do Rego Medeiros Alexandre Luís de Souza Barros Cláudio Roberto Cavalcanti da Fonseca Verônica Gitirana

Histórico do Jogo



Figura 1: Jogo da Velha com Figuras Geométricas

O *Jogo da Velha com Figuras Geométricas* é uma adaptação do "*Jogo da Velha* com peças dos Blocos Lógicos" desenvolvido pelo Laboratório do Ensino de Matemática do Moreno – LEMAM. Participaram da elaboração preliminar do jogo: Ildelmo Medeiros, Pedro Ferreira, Valdilene Rodrigues, Enildo Batista, Generino Santana e Flavia Gomes.

O jogo, por sua vez, foi elaborado com base nas ideias do popular *Jogo da Velha* conjuntamente com o aproveitamento das peças dos Blocos Lógicos.

Achados arqueológicos em diferentes regiões do mundo, China e América précolombiana, mostram que civilizações antigas praticavam o que conhecemos por *Jogo da Velha*. Contudo a referência mais antiga estar nas escavações ao templo de Kurna (apogeu por volta do século XIV antes de Cristo), no Egito.

Acredita-se ter originado na Inglaterra, nas reuniões de mulheres, ao fim de tarde, pois aquelas que não possuíam mais condições de bordar em razão da fraqueza de suas vistas jogavam este jogo, passando a ser conhecido como o "*Jogo da Velha*".

Conhecido em quase todo o mundo, seu nome varia conforme a região e época: na China de 500 a.C., era conhecido como luk isut k-i; nos países de língua inglesa, chamava-se tick-tack, atualmente: tic-tac-toe.

De certa forma, este jogo possui semelhanças com os da "família do moinho" ou "trilha", nos quais o objetivo é posicionar as peças de modo que formem uma linha reta.

Adaptou-se o *Jogo da Velha* para trabalhar as propriedades das figuras geométricas e as propriedades físicas dos objetos que representam as figuras traçadas.

Caracterização do Jogo

Material

- Um tabuleiro quadrado 4 x 4;
- Dezesseis peças com figuras geométricas planas, distribuídas em dois kits com cores diferentes;
- Cada kit é composto das possíveis combinações entre as 4 figuras (triângulo, quadrilátero, circulo e hexágono) e 2 tamanhos (pequeno e grande), como a figura abaixo:



Figura 2: Kit de peças de um jogador

 Material para marcação dos pontos obtidos no jogo: podem ser fichas, sementes ou papel para registro, por exemplo.

Participantes

Dois jogadores (ou duas duplas) e um juiz. De uma partida para outra, deve haver rotatividade de papeis desempenhados pelos participantes.

Objetivo do Jogo

O jogo é vencido pelo jogador que fizer mais pontos ao final da distribuição de todas as peças no tabuleiro.

Regras

- 1. Cada jogador recebe um kit completo (todas as peças de uma mesma cor);
- 2. Os jogadores devem decidir no par ou ímpar quem inicia o jogo. A partir daí jogam alternadamente.
- 3. Cada jogador, em sua vez, coloca uma de suas peças em uma casa vazia do tabuleiro;
- 4. O jogador marca pontos, cada vez que conseguir formar uma linha, coluna ou diagonal, satisfazendo uma ou mais das seguintes combinações:
 - Quatro peças da mesma cor;
 - Quatro peças de mesma figura;
 - Quatro peças de figuras distintas;
 - Quatro peças pequenas;
 - Quatro peças grandes.
- 5. Na formação das linhas, colunas ou diagonais, as peças podem ser de ambos os jogadores. Marca ponto aquele que colocar a peça que completa uma ou mais das combinações acima. Por exemplo, na configuração abaixo, há peças dos dois jogadores, mas marca ponto o jogador azul, que coloca o hexágono, pois forma uma diagonal com quatro peças que são de figuras distintas e grandes.

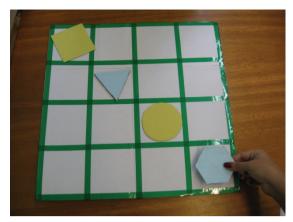


Figura 3: Jogada com dois critérios satisfeitos

6. A cada critério satisfeito o jogador marca um ponto. Portanto, no caso acima, o jogador azul marca dois pontos porque atendeu o critério da diagonal estar preenchida com peças grandes e o critério de todas as peças serem figuras diferentes. No exemplo a seguir, o jogador amarelo marcaria três pontos, uma vez que a linha atende a três critérios: são quatro peças pequenas, todas amarelas e de figuras diferentes.

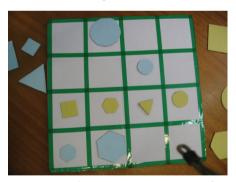


Figura 4: Jogada com três critérios satisfeitos

7. No caso em que ao colocar uma peça o jogador completa ao mesmo tempo uma linha e uma coluna, uma linha e uma diagonal ou ainda uma diagonal e uma coluna, contabilizam-se todos os pontos correspondentes aos critérios atendidos. No exemplo abaixo, o jogador amarelo ao colocar seu tri-

ângulo grande completa ao mesmo tempo uma linha e uma coluna. Neste caso marca três pontos, pois a linha é composta de figuras distintas e todas amarelas e a coluna é composta de triângulos.

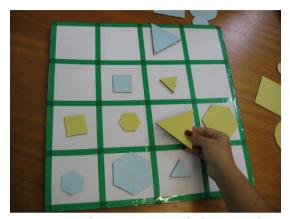


Figura 5: Jogada com pontos em linha e em coluna

- 8. A cada jogada, cabe ao juiz validar e registrar os pontos, entregando ao jogado uma ou mais sementes (fichas), de acordo com a quantidade de pontos marcados.
- 9. Quando todas as peças forem distribuídas e o tabuleiro preenchido, verifica-se quem fez mais pontos.

Finalidades Educacionais

Este jogo é simples, pois se baseia em outro bastante conhecido. Possui características semelhantes no que diz respeito a ser um jogo de estratégia. Diferentemente dos jogos com dados, neste não existe interferência de sorte. Em cada partida, o jogo se renova, pois não existe obrigatoriedade de padrão nas jogadas, deixando os participantes mais livres. Também não há restrições quanto às casas do tabuleiro a serem ocupadas, qualquer casa desocupada é comum aos dois participantes. Algumas finalidades didáticas do *Jogo da Velha com Figuras Geométricas* são:

- Classificar objetos a partir de diferentes critérios como cor e figura. A classificação das peças em "grandes" e "pequenas" corresponde a intervalos de áreas, perímetro ou outra grandeza contínua. A discussão de tal classificação já é por si só uma atividade de grande valia para o estudo das grandezas e medidas.
- Explorar o mapeamento de possibilidades.
- Planejar e desenvolver estratégias a partir do mapeamento das peças existentes.
- Identificar figuras geométricas planas.
- Desenvolver a percepção visual.

Capítulo II

Mankala Colhe Três

Juliana Andrade Yara Leal Andréa Monteiro Regina André Diógenes Maclyne Rosinalda Teles Verônica Gitirana

Histórico do Jogo

A Mankala Colhe Três é uma adaptação com finalidades educacionais do jogo Mankala, na versão Ouri. Mankala é uma palavra árabe, que significa transferir. É jogado há milhares de anos nos países africanos, no Sri Lanka, na Ásia Central e em muitos países de língua árabe [1]. Acredita-se que tal jogo tenha sido



Figura 6: : Mankala Ouri

inspirado na semeadura e na colheita da agricultura e consiste na transferência de sementes entre diferentes covas escavadas em peças de madeira. Alguns autores consideram que o jogo tem origem africana e existem muitos tipos de Mankala, diferentes de região para região. Os tabuleiros de Mankala lembram ábacos antigos.

A Mankala Colhe Três, assim como as tradicionais, é um jogo de estratégia. A Mankala, em geral, possui muitas regras, o que, às vezes, desestimula as pessoas a jogá-lo. Nesse sentido, partiu-se de uma modalidade com regras mais simples, a Mankala Ouri. Além disso, para deixá-lo menos demorado, o jogo aqui proposto ficou com apenas 5 (cinco) covas e é iniciado com 5 (cinco) sementes em cada cova. Recomenda, ainda, que participem de 2 (dois) a 4 (quatro) jogadores.

Após algumas experimentações com crianças e com adultos, decidiu-se colorir as covas. Essas cores visam facilitar o jogador a lembrar a cova de onde retirou as sementes para redistribuir. Decidiu-se, ainda, colocar setas indicando o sentido horário em que as sementes devem ser redistribuídas, devido à dificuldade de a criança manter esse sentido durante o jogo.



Figura 7: : Mankala Colhe Três

Caracterização do Jogo

Material

- Um tabuleiro com cinco covas dispostas nos vértices de um pentágono, como mostra a figura;
- 25 sementes (ou canudos cortados, botões,...)



Figura 8: Tabuleiro

Participantes

De dois a quatro jogadores. A quantidade de participantes influencia na complexidade do jogo. Quanto mais participantes, menor o tempo da partida, e menor o número de estratégias vivenciadas por cada jogador. Para crianças pequenas, sugere-se a diminuição do número de sementes iniciais para cada cova.

Objetivo do Jogo

O objetivo do jogo é colher o maior número de sementes e, para isso, contamse quantas sementes cada jogador colheu ao terminar a partida. O vencedor será aquele que colher o maior número de sementes.

Regras

- 1. O jogo começa com cinco sementes em cada cova.
- Os jogadores decidem, entre si, quem deverá iniciar e qual será sequência dos demais jogadores.

3. Cada jogador, em sua vez, escolhe uma das covas, retira todas as sementes que estão nela, divide a quantidade de sementes em partes iguais, e redistribui todas as partes entre as covas seguintes, seguindo o sentido horário.



Figura 9: Sequência de uma jogada

Atenção:

- a. Não se inclui, na redistribuição, a cova da qual foram retiradas as sementes. A redistribuição inicia-se na cova seguinte;
- b. Ao redistribuir, não se pulam covas;
- Podem-se passar todas as sementes para a próxima cova, considerandose, desse modo, dividido em uma única parte o lote de sementes retiradas.
- d. No caso de ser maior do que 4 o número de partes em que for dividido o lote de sementes retiradas, uma mesma cova receberá sementes mais de uma vez.
- 4. O jogador recolhe as sementes da última cova em que ele colocou sementes, quando nessa última ficarem exatamente três sementes.
- 5. O jogo termina quando:
 - a. ocorrerem cinco rodadas (todos os jogadores jogam) sem ninguém recolher sementes; ou
 - b. restarem apenas quatro sementes no tabuleiro.
- 6. Ao término do jogo, contam-se quantas sementes cada jogador colheu. Ganha quem colheu mais sementes.

Finalidades Educacionais

Inspirados no jogo do Mankala Ouri, buscamos desenvolver um jogo que permitisse o trabalho com os divisores de um número. Adaptamos o jogo para que o mesmo fosse mais rápido que o do Mankala Ouri, com finalidades de uso em sala de aula. Nesse sentido, o número de covas foi diminuído. Alterou-se também a forma de distribuir as sementes. No Mankala Ouri, as sementes são distribuídas uma a uma. Já no *Mankala Colhe Três*, o jogador decide o número de sementes que irá distribuir em cada cova, devendo dividir o número de sementes em partes iguais e distribuir as partes em sequência das covas. Nesse sentido, ele estará buscando os divisores de um número.

A partir do experimento com uma criança, percebeu-se a dificuldade de lembrar de que célula havia retirado as sementes antes de distribuir. Foi por essa razão que se optou por colorir cada cova com uma cor diferente.

Em uma das montagens do *Mankala colhe três* com sucata, utilizamos bolinhas de papel. No entanto, nossa experiência mostrou não ser um bom substituto da semente, dada a dificuldade de distinguir quantas bolinhas têm quando elas estão muito juntas. Desta forma, recomenda-se cuidado ao escolher as sementes e os recipientes que funcionarão como covas. O limite das sementes precisa ser bem perceptível.

Como todo jogo de estratégia, várias partidas precisam ser jogadas para que a criança comece a desenvolver estratégias. Em geral, ela inicia escolhendo uma casa e distribuindo sempre de uma em uma semente. Na medida em que evolui, vai desenvolvendo novas estratégias e utilizando os divisores.

O jogo da Mankala Colhe Três pode ser utilizado no ensino da matemática com diversas finalidades, dentre as quais:



Figura 10: Jogada em que se passam todas as sementes para próxima cova

- Desenvolver estratégias de quantificar mentalmente;
- Resolver problemas com situações mistas: aditivas e multiplicativas;
- Dividir por cálculo mental;
- Mapear as possibilidades;
- Explorar as possibilidades de distribuição em partes iguais a partir das quantias existentes nas covas:
 - o Reconhecer os divisores de um determinado número.
 - o Identificar múltiplos de um número.
 - Reconhecer números primos e compostos.

Desenvolver a habilidade de quantificar mentalmente

Pesquisadores como Constance Kami [2], Terezinha Nunes [3] e Mabel Panizza [4] discutem a evolução da habilidade da criança em quantificar no processo de aquisição do número. Nesse **processo**, a relação de ordem, necessária para que ela não deixe de contar um elemento ou que conte um elemento mais de uma vez, é desenvolvida inicialmente a partir de um esquema de organização dos elementos, tal como o alinhamento, a marcação, a correspondência. O ato de contar objetos dispostos desordenadamente é uma habilidade mais complexa. Ao jogar o *Mankala Colhe Três*, uma das primeiras etapas de cada jogada é saber quantas sementes há em cada cova. Essas sementes estão dispostas de forma desordenada. Isto leva o aluno a desenvolver a capacidade de contar objetos dispostos de forma desordenada mais rapidamente e visualmente. Para contar, muitos desenvolvem esquemas de agrupamentos, por exemplo.

Resolver problemas de situações mistas: aditivas e multiplicativas

Gerárd Vergnaud [5] aponta a necessidade de lidar com diferentes situações que deem significado aos conceitos e procedimentos matemáticos. O desenvolvimento de estratégias durante o jogo *Mankala Colhe Três* oferece ao jogador a articulação de situações com diferentes significados para a adição, multiplicação, subtração e divisão. Um exemplo delas pode partir

da seguinte configuração de tabuleiro e escolha de tirar as sementes da cova amarela.



Figura 11: Configuração de uma jogada

Um raciocínio vitorioso pode ser o seguinte:

"Faltam duas sementes para colher na cova verde. Se distribuir de dois em dois, eu consigo!".

Com isso, o jogador desenvolve uma estratégia de jogada a partir da resolução da situação "quantas sementes faltam para eu completar as três?", "em quantas partes devo distribuir para conseguir essa quantia na última cova?" e "quantas covas são da cova inicial até a pretendida?". A primeira, sendo uma situação aditiva que resolvida por subtração; a segunda, uma situação multiplicativa de cota, e a terceira, outra situação aditiva. O sucesso da jogada vai depender da estratégia gerada a partir dessa correlação.

Dividir – por cálculo mental

Ao jogar a *Mankala Colhe Três*, o participante é incentivado a realizar divisões por cálculo mental, em especial a identificar aquelas que são exatas. Ao escolher uma cova, o participante tem:

- como dividendo, o número de sementes existentes na cova escolhida;
- como divisor, o número de covas seguintes a serem distribuídas as sementes;
- como quociente, o número de sementes que serão colocadas em cada cova.

O resto das divisões é sempre zero visto que na regra exige-se que as sementes sejam dividida em partes iguais para iniciar a redistribuição.

Na jogada simulada na imagem a seguir, o jogador toma a decisão de retirar as sementes da cova amarela e redistribuí-las em duas partes iguais, sendo colocadas três sementes em cada cova seguinte.

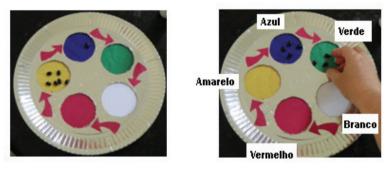


Figura 12: Jogada em cotas de duas sementes

Mapear as possibilidades

Cada jogador tem, ao início da jogada, a decisão de escolher uma entre as cinco covas existentes no tabuleiro. Após isso, a sua próxima escolha é a de em quantas partes redistribuir as sementes da cova escolhida. Dessa maneira há uma grande quantidade de jogadas que podem ser realizadas, entretanto, o jogador deve prever dois importantes elementos:

- a jogada que lhe possibilita ganhar sementes;
- a jogada que não deixa margem para o seu opositor ganhar na jogada seguinte.

Assim, o sucesso do jogador depende de quão eficientes são os mapeamentos das possibilidades de jogadas realizados por ele. O jogo incentiva, portanto,

que o jogador antecipe as possibilidades desenvolvendo a habilidade de planejar mapeando as possibilidade da 1ª jogada, da 2ª jogada ... Quanto mais jogadas consegue-se mapear, mais hábil será o jogador.



Figura 13: 2a configuração de jogada

Na jogada simulada da Figura 13, percebe-se que entre as cinco covas que o jogador tem para escolher, a única que possibilita o ganho de sementes é a que parte da cova que contém quatro sementes. Entretanto, mesmo partindo de tal cova, o jogador deve ter o cuidado de escolher a jogada mais conveniente, entre as três que lhe são possíveis e que serão ilustradas nas imagens que se seguem.

1ª Escolha: Distribuir as sementes em quatro partes iguais.

Com essa escolha o jogador não colhe sementes, conforme pode ser visualizado na configuração do tabuleiro na Figura 14. E, ainda, favorece ao seu opositor marcar pontos na jogada seguinte.



Figura 14: Jogada com quatro cotas de uma semente

2ª Escolha: Colocar todas as sementes na cova seguinte.

Com essa jogada, conforme disponível na Figura 15, que apresenta a configuração do tabuleiro após essa jogada, pode-se perceber que o jogador não obtém pontos e favorece a jogada de seu opositor.



Figura 15: Jogada uma cota de quatro sementes

3ª Escolha: Distribuir as sementes em duas partes iguais.

O jogador obtém pontos com essa jogada e não gera a possibilidade de seu opositor também fazer pontos na jogada seguinte, como pode ser visualizado na configuração do tabuleiro após a jogada do opositor, disponível na imagem que se segue.

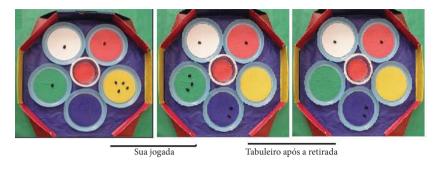


Figura 16: Jogada que colhe sementes

Reconhecer divisores de um determinado número

A cada jogada o foco do jogo é identificar os divisores de cada número de sementes. Um importante elemento a ser considerado sobre ela é a possibilidade de construção de conhecimento relacionado aos conceitos de divisores, como serão apresentados a seguir, a partir da imagem seguinte referente a uma possível configuração do tabuleiro.



Figura 17: Terceira configuração de jogada

O jogador pode realizar a sua jogada escolhendo como ponto de partida a cova azul, que possui 6 sementes. Seu próximo problema é decidir em quantas partes iguais vai dividir essas sementes, visto que pode fazê-lo de quatro maneiras distintas: colocar 6 em 1 cova, colocar 2 em 3 covas, colocar 3 em

2 covas, e colocar 1 em 6 covas. Essa abrangência de possibilidades acontece devido ao fato do número 6 ter quatro divisores.

Decidir se um número é múltiplo dos outros

O jogador pode também olhar a cova branca e saber que faltam 2 sementes para poder colher dali. Olhar as covas e ver em quais delas o número de sementes é múltiplo de dois e se dividindo aquela quantidade por dois terá o número de partes necessárias para chegará à cova branca.

Reconhecer números primos

Diferente da quantidade de possibilidades de jogadas disponíveis para o jogador que escolhe como partida a cova com seis sementes, aquele que escolhe partir da cova vermelha, com cinco sementes, tem apenas duas: a de distribuir as sementes uma a uma, entre as cinco covas seguintes e a de colocar todas as cinco sementes na cova seguinte. Isso ocorre porque 5 é um número primo, que só tem dois divisores, 1 e ele mesmo. Os números primos vão ser quantidades especiais neste jogo, pois permitem menos possibilidades de jogadas.

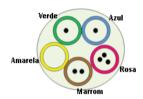
Atividades com o Mankala Colhe Três

A exploração matemática de um jogo pode se dar no próprio ato de jogar como é o caso já comentado do *Mankala colhe três*. Há, no entanto, outras formas de explorar matemática por meio do jogo. Uma delas é, após o aluno já estar familiarizado com o jogo, propor situações problema que têm como contexto uma partida simulada. Esse tipo de atividade pode também incentivar que o aluno reflita sobre o desenvolvimento de estratégias no jogo.

A seguir apresentamos algumas atividades com esse tipo de exploração. Lembre-se, porém, que a vivência do jogo não deve ser interrompida para a resolução dos problemas. A atividade com o contexto do jogo pode ser lançada em outro encontro após se jogar.

Atividade 1

Alberto e Raquel estavam no meio de uma partida, quando ouvem o sinal anunciando o fim do recreio. Observe, a seguir, como estava o jogo deles, ao final do recreio.



Responda agora:

- a) Lembrando que, no início da partida, cada cova tem 5 sementes, responda: quantas sementes já foram retiradas do tabuleiro?
- b) Raquel tem o dobro de sementes de Alberto. Quantas sementes têm Alberto?
- c) Eles decidiram terminar a partida após o final das aulas. Caso seja a vez de Alberto jogar e ele tenha escolhido distribuir as sementes da cova rosa.
 - I. Quais as possíveis jogadas dele?
 - II. Ele ganhará em alguma?
 - III. Em algumas dessas jogadas, Raquel pode ganhar na jogada seguinte?
 - IV. Escolher cova rosa foi uma boa jogada para Alberto? Justifique
- d) O que você faria se no caso da ilustração acima fosse a sua vez de jogar?

Atividade 2

Em uma partida de Mankala Colhe Três, Raquel e Alberto estão jogando e é a vez de Alberto jogar. O tabuleiro está disposto da seguinte forma:



- a) Quantas e quais são as possíveis jogadas de Alberto?
- b) Em qual das covas (verde ou amarela), há mais jogadas possíveis? Por quê?
- c) Quantas e quais são as jogadas em que ele consegue colher sementes?

Atividade 3

Pedro e Manoel estão em uma partida de Mankala Colhe Três é a vez de Pedro. Ele olha as sementes e afirma que o jogo está errado e que está faltando uma semente no tabuleiro.



Discuta a afirmativa de Pedro:

- a) É possível ter esse número de sementes numa jogada? Justifique.
- b) Pedro está correto ao afirmar que falta uma semente no tabuleiro? Por quê?

Capítulo III

Jogo dos Polígonos

Bruno Leite Dierson Gonçalves Evanilson Landim Ivanildo Carvalho Iolanda A. C. Almeida Franck Bellemain Lílian Débora de Oliveira Barros

Histórico do Jogo

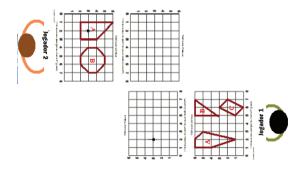


Figura 18: Jogo dos polígonos

O *Jogo dos Polígonos* é inspirado na *Batalha Naval*, na qual os oponentes procuram localizar (ou "afundar") "navios de guerra" do adversário. Essas embarcações são formadas por disposições pré-estabelecidas de quadrados básicos de uma malha. Um navio é localizado quando todos os quadrados que o formam são descobertos pelo oponente. Ganha o jogo aquele que primeiro "afundar" todos os navios do adversário.

Algumas fontes afirmam que esse jogo foi criado por Clifford Von Wickler em 1900, baseado nas batalhas da Primeira Guerra Mundial. Foi bastante jogado no Brasil, na década de 80. Descreveremos, a seguir, uma possível versão desse jogo.

Na *Batalha Naval*, geralmente disputada por duas pessoas, cada jogador inicia a partida com uma folha de papel (ou um tabuleiro), na qual estão desenhadas duas malhas quadradas iguais, conforme a figura a seguir. Em uma dessas malhas, que chamaremos malha de defesa do jogador A, este escolhe onde localizar sua frota. As regras para a formação das embarcações da frota, pela justaposição de lados de quadrados básicos da malha, podem ser as seguintes: hidroavião (5 quadrados) formando um tê; submarino (4 quadrados); cruzador (3 quadrados); dois encouraçados (2 quadrados, cada um); e três porta-aviões (1 quadrado, cada um). As embarcações devem ser separadas umas das outras. Por exemplo, dois porta-aviões não podem ter pontos em comum, como um lado, um vértice ou um ponto do lado. Além disso, o jogador não deve revelar ao oponente as localizações dos seus navios.

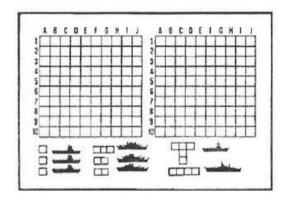


Figura 19: Batalha naval

Um elemento importante na *Batalha Naval* é o modo de localização empregado. De fato, no jogo, os navios são identificados pelos seus quadrados básicos e estes são localizados como **regiões planas** na malha. Para isso, num dos eixos, que chamaremos eixo horizontal, sucessivos intervalos são identificados por letras, na ordem alfabética. No outro eixo (eixo vertical) intervalos são marcados com a sequência numérica dos naturais, como podemos ver na figura a seguir. Um quadrado qualquer da malha é identificado quando formamos um par ordenado em que o primeiro elemento é uma letra e o segundo um

número natural. Por exemplo, o quadrado (C,5) encontra-se no "cruzamento" da faixa que tem, no eixo horizontal, o coluna C como lado com a faixa que tem, para um de seus lados, a linha 5 do eixo vertical. É bom lembrar que este é um modo bastante empregado para localizar regiões quadradas em mapas de cidades e, por isso, é relevante do ponto de vista do ensino básico.

Caracterização do Jogo dos Polígonos

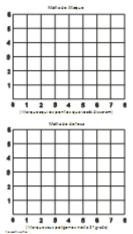
No *Jogo dos Polígonos*, adaptamos a *Batalha Naval* para explorar com os alunos vários conceitos geométricos, em particular propriedades de polígonos.

Ao invés de escolher navios que são figuras geométricas pré-estabelecidas, cada jogador traça polígonos em sua malha de defesa e tentará localizar e identificar os polígonos do oponente.

No jogo o modo de localização adotado baseia-se na noção de plano cartesiano. Cada jogada consiste em escolher um ponto na malha de defesa do adversário, fornecendo suas coordenadas cartesianas naquela malha. Na *Batalha Naval*, como vimos acima, localizam-se regiões quadradas que formam as malhas. No *Jogo dos Polígonos*, são localizados pontos de encontro das linhas das malhas. Esta distinção é sutil no início da aprendizagem e deve ser bem observada. Como sabemos as coordenadas cartesianas de um ponto na malha quadrada são pares de números naturais, o primeiro, a abscissa do ponto e o segundo, a ordenada do ponto.

O tabuleiro do *Jogo dos Polígonos* é formado por duas malhas quadradas. O que chamamos aqui de 'tabuleiro' pode ser uma superfície plana de qualquer material ou, simplesmente, uma folha de papel apoiada em uma carteira escolar. O fato de serem malhas quadradas é importante, ao final deste texto justifica-se essa afirmativa. As malhas podem ser obtidas, entre outras, nas seguintes maneiras: obtenção de folhas de papel quadriculado; construção de malhas quadriculadas a partir de folhas de papel com pautas horizontais;

construção das malhas com papel branco e instrumentos de desenho; construção das malhas no computador (neste caso, cuidado com distorções na impressão, para assegurar que a malha seja realmente quadrada); confecção das malhas por dobradura em papel branco, etc. No documento de confecção do tabuleiro do jogo, você encontrará instruções para confecção das malhas por dobradura. Foi também fornecido um molde para reprodução das malhas.



Material

Figura 20: Tabuleiro

- Dois tabuleiros com malhas quadradas com marcação do sistema cartesiano;
- Uma ficha de anotações para cada jogador;
- Uma caneta ou um lápis para cada jogador.

Participantes

Dois jogadores (ou dois times) e um juiz, se houver interesse, para servir de mediador na validação das dúvidas levantadas. O professor poderá assumir a função de juiz.

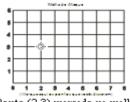
Objetivos do Jogo

O objetivo de cada jogador (ou de um time) é o de localizar e identificar todos os polígonos do oponente, mais especificamente, indicando:

- a. Sua classificação segundo o número de lados (triângulo, quadrilátero, pentágono, hexágono,...), que denominaremos tipo da figura;
- b. As localizações dos vértices de cada polígono.

Regras

- 1. No início do jogo cada jogador recebe um tabuleiro com duas malhas e dois espaços para observação, e uma caneta ou lápis para anotações.
- 2. O jogador deve manter o seu tabuleiro sem que seu oponente possa vê-lo.
- 3. Em sua malha de defesa, cada jogador deve desenhar, no mínimo, dois polígonos com vértices nos pontos de encontro de duas linhas da malha (pontos com coordenadas cartesianas inteiras pontos de encontro de linhas da malha), com as seguintes condições:
 - a. Cada polígono deve ser separado dos outros polígonos, ou seja, dois polígonos quaisquer não podem ter nenhum ponto em comum, nem mesmo um de seus vértices;
 - b. O total de vértices dos polígonos deve ser igual 12;
 - c. Cada polígono tem que conter, ao menos, um ponto de encontro das linhas da malha em seu interior, para evitar polígonos muito pequenos;
 - d. Colocar um rótulo em cada polígono desenhado (tipo: A, B, C, D, ...), a fim de facilitar o jogo, principalmente, para o Ensino Fundamental I.
- Sorteia-se aquele que vai iniciar. As jogadas se alternarão entre os dois jogadores.
- 5. Em sua vez, o jogador A dá um lance que pode ser de dois tipos:



Ponto (2,3) marcado na malha

Figura 21: Ponto (2,3) marcado na malha

 a. Um ponto da malha (ponto de encontro das linhas da malha - par cartesiano) da malha de defesa do oponente, B. Isto é, as coordenadas cartesianas de um ponto da malha. Ele deverá dizer inicialmente o

- valor na horizontal seguido da posição vertical, tipo (2,3) marcado na malha ao lado;
- b. A identificação de um polígono que ele julga haver localizado ou uma de suas propriedades geométricas ou uma questão sobre uma propriedade de um polígono que está tentando localizar.
- 6. No caso (a), o oponente, B, responde indicando se o lance dado por A corresponde a ponto:
 - a. fora dos polígonos em sua malha de defesa;
 - b. no interior desses polígonos;
 - c. em um dos vértices de algum dos polígonos. Neste caso, o jogador B se obriga a dar uma dica ao seu oponente, que é a informação de uma propriedade geométrica do polígono acertado;
 - d. Em um dos lados de algum dos polígonos, que não seja um vértice. Obs.: o jogador B deve dizer o rótulo do polígono acertado por A para os casos (b), (c) e (d).
- 7. Caso o lance de A seja uma identificação ou uma propriedade, o oponente, B, deve dizer se ela está correta ou errada.
- 8. Os jogadores deverão utilizar legenda a seguir para anotar as jogadas na malha superior de seu tabuleiro, a partir das respostas dadas. Isto fará com que o aluno tenha um controle maior das jogadas.
 - Ø fora dos polígonos
 - dentro de um polígono
 - o em um dos lados de um polígono
 - x no vértice de um polígono

Figura 22: Legenda para os pontos do jogo

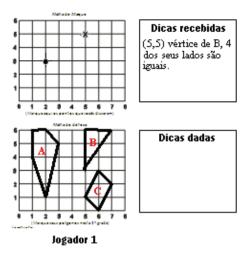


Figura 23: Jogada com anotações

1º Exemplo: caso o jogador 1, ver Figura 23, tente o ponto (2,3), o oponente indicará que ele acertou no interior do polígono A, e o jogador 1 fará a seguinte anotação em seu tabuleiro, como mostra a Figura 24.

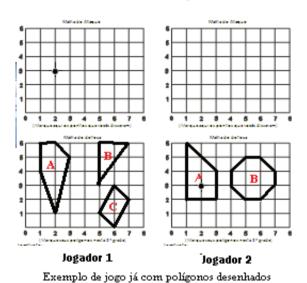


Figura 24: Exemplo de jogada já com polígonos marcados

- **2º Exemplo:** caso o jogador 1 tente o ponto (5,5), o oponente indicará que ele acertou um vértice do polígono B e poderá dizer, por exemplo, que 4 de seus lados têm mesmo comprimento.
- 9. O jogador deverá anotar no quadro de anotações as dicas recebidas e no outro quadro os pontos ou questões do adversário.
- 10. Dentre as dicas dadas, é vetado:
 - a. Repetir uma dica já dada;
 - b. Dar uma dica equivalente à outra dica já dada;
 - c. Dar uma dica com menos informações que as já obtidas pelo oponente. Por exemplo, o jogador 1 já identificou 4 vértices do polígono B. Acerta um 5° vértice, o jogador 2 não pode apenas dizer que é um polígono com mais de 3 vértices, já que essa informação o jogador 1 já tem.
- 11. Caso acerte a identificação de um polígono, o jogador terá o direito de fazer uma pergunta à equipe adversária em relação a algum lance ou a outro polígono.
- 12. Termina o jogo quando um dos jogadores conseguir identificar todos os polígonos do oponente.

A malha quadrada

A malha do *Jogo dos Polígonos* deve ser formada de quadrados. O uso de uma malha retangular, não quadrada, pode implicar em confusões para que o jogador observe propriedades das figuras em um plano cartesiano em que as escalas do eixo horizontal e do eixo vertical são diferentes. O uso de uma malhar retangular, não-quadrada, fará com que, por exemplo, o quadrado formado pelos pontos (0,0); (0,2); (2,2) e (2,0) pareça um retângulo não quadrado, mas pela malha calculando a distância entre os vértices teremos que ele tem todos os lados iguais.

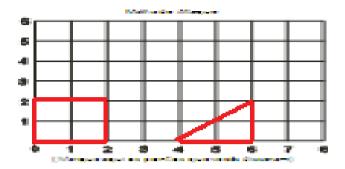


Figura 25: Malha retangular não quadrada

Também como mostra a figura do triângulo, os ângulos aparecem deformados. O triângulo desenhado, por exemplo, deveria ser um triângulo retângulo isósceles, mas sua aparência não ajudará o aluno a entender os ângulos internos não reto como côngruos.

Finalidades Educacionais

A Geometria tem sua importância na Educação Básica desde a Educação Infantil até o Ensino Médio, em que são estudados:

- Noções de localização no espaço;
- Noções de direção e sentido;
- Reconhecimento de figuras;
- Estudo das propriedades das figuras;
- Estudo da representação do espaço no plano cartesiano;
- Estudo das propriedades das figuras;
- Formulação de conjecturas;
- Construção do raciocínio dedutivo.

Dentre diversos outros conteúdos que poderíamos citar.

A criança inicia o estudo das figuras por seu aspecto perceptual, e segundo os níveis de Van Hiele [6][7] progride em seu estudo nos seguintes níveis:

Nivel 0: Reconhecimento;

Nivel 1: Análise;

Nivel 2: Ordenação ou classificação;

Nivel 3: Dedução formal;

Nivel 4: Rigor.

No entanto, cada nível é caracterizado por relações entre o objeto de estudo e a capacidade que o indivíduo tem de perceber e entender determinadas relações.

No que se refere ao estudo dos polígonos, a criança começa por:

- Reconhecer tipos específicos de polígonos como quadrados, triângulos, pentágonos, retângulos,... como um conhecimento perceptual, a partir dos desenhos que vê;
- 2. Trabalhar com esses tipos de polígonos;
- 3. Estudar diferentes propriedades dos polígonos;
- 4. Entender as classificações dos polígonos a partir de suas propriedades.

O jogo dos Polígonos envolve diversos conceitos, propriedades e habilidades para o desenvolvimento do conhecimento geométrico pelo aluno. Discutiremos aqui algumas dessas habilidades com conhecimentos e propriedades envolvidos sintetizados como:

- 1. Leitura e identificação de pontos no plano;
- 2. Mapeamento de possibilidades;
- 3. Reconhecimento de diferentes polígonos numa mesma classe de figura;
- 4. Identificação dos elementos dos polígonos e posições de pontos relativas a ele;
- 5. Visualização de polígonos a partir de suas propriedades;
- 6. Exploração de propriedades diversas;
- 7. Desenvolvimento do raciocínio dedutivo.

A leitura e identificação de pontos no plano

Sistemas de localização no plano são bastante utilizados na matemática, na geografia e em outras ciências. Ao fazer uma jogada, o aluno lida com:

- 1. a leitura dos pontos num sistema de coordenadas Tipo (2,3). Cada lance envolve a leitura de um ponto do plano cartesiano;
- 2. a importância da ordem na notação do ponto. Caso marque o ponto (2,3) como o ponto (3,2), ao longo do jogo os alunos perceberão a diferença e a importância de respeitar a ordem;
- 3. a identificação dos pontos no plano Cartesiano. Ao ouvir o lance do colega o aluno precisará identificar tal ponto no sistema cartesiano e, a partir daí, responder ao colega o resultado do seu lance.

Observação de polígonos

Quando mencionamos a palavra triângulo, não estamos nos referindo a um triângulo em particular, mas a uma classe de triângulos, que inclui os equiláteros, escalenos, acutângulos, e inúmeras outras situações.

Podemos dizer então que conhecer e reconhecer a figura de um triângulo ou de qualquer outra figura geométrica implica em dominar uma classe de situações. Essas diferentes situações não aludem apenas à configuração do contorno ou da aparência da figura geométrica, vai repercutir nos elementos que a caracterizam e que são inerentes à própria figura.

Logo, é necessário que o aluno aprenda a observar essas figuras. Que o aluno seja capaz de percebê-la sob diferentes condições ou por meio de características que não se refiram diferentemente a sua classificação. Para exemplificar o que estamos dizendo, podemos citar o exemplo de colegas de uma mesma turma que são capazes de identificarem uns aos outros em diferentes ambientes, vestido com fardamento escolar ou roupa de passeio e até pelas costas; isso porque eles se apropriaram de mais informações sobre o

colega do que simplesmente da aparência física. Conhecemos mais sobre algo quando o percebemos sob diferentes facetas, ou seja, teremos mais domínio a respeito de uma figura geométrica se a percebemos sob diferentes condições, isto é, se conhecemos as suas propriedades geométricas.

Para atingir tal objetivo, é necessário desenvolver a habilidade de perceber semelhanças e diferenças, identificar relações e fazer correspondências.

Nesse jogo, tal habilidade pode ser desenvolvida em função de que é armada toda uma estratégia pelo jogador para posicionar a figura geométrica em condições que venham a dificultar a identificação pelo opositor. Com isso eliminam-se as posições prototípicas, geralmente adotadas na representação das figuras.

Além disso, quando são formuladas as dicas, o aluno é levado a fazer conjecturas que perpassam por possíveis modelos, que vai construindo a imagem da figura a ser encontrada.

O mapeamento de possibilidades

Ao desenhar seus polígonos, o aluno:

- traça diferentes polígonos de modo que, somando a quantidade de vértices dá 12. Pouco a pouco o aluno irá buscando diferentes possibilidades de fazer tal combinação de forma a dificultar que o colega descubra seus polígonos;
- identifica diferentes possibilidades de fazer essa escolha, quanto à quantidade de lados;
- 3. mapeia diferentes possibilidades para traçar cada polígono.

Agora é com você:

É possível traçar um triângulo equilátero na malha quadrada?

O reconhecimento de diferentes polígonos numa mesma classe de figura

Ao desenhar seus polígonos, assim como responder aos lances, o aluno lida com:

- 1. Polígonos não prototípicos como o trapézio traçado pelo jogador 2.
- 2. Posições não prototípicas dos polígonos, como o triângulo retângulo traçado pelo Jogador 1.
- 3. Reconhecimento de diferentes propriedades em um mesmo polígono. O jogo impulsiona que cada jogador, para dar uma dica, pense em diversas propriedades dos polígonos, de forma a buscar uma que não facilite ao outro jogador localizar o seu polígono.
- 4. Reconhecimento de uma mesma propriedade em diferentes polígonos.

A identificação dos elementos dos polígonos e posições de pontos relativas a ele

Ao fazer um lance e responder a lances, o aluno lida com:

- 1. Identificação de vértices de polígonos;
- 2. Identificação dos lados de um polígono;
- 3. Identificação dos pontos interiores a um polígono;
- 4. Identificação de pontos exteriores ao polígono.

A visualização de polígonos a partir de suas propriedades

A identificação da natureza e posição das figuras durante o jogo ocorre de duas maneiras: pelos lances que são dados, ou seja, por posições de coordenadas na malha que venham a ficar no interior da figura, coincidir com vértices e arestas; ou pelas pistas que são mencionadas durante as jogadas pelo opositor. Assim, o que ocorre é que a construção mental sobre a figura é feita por meio

verbal. Articula-se a propriedades verbais com a imagem mental, facilitando a capacidade de visualizar objetos geométricos a partir de suas descrições.

Quando o aluno se depara com um triângulo, ao se referir a este, ele vai se reportar às suas propriedades e não apenas a sua classificação como triângulo. Da mesma forma, quando o aluno é informado das propriedades da figura, ele vai montar uma teia de informações para chegar à classificação da figura quanto ao número de lados e a posição de seus vértices. É como se a figura geométrica fosse apresentada e construída a partir "de seu esqueleto", de dentro para fora.

A implicação disso é que se direciona o foco da figura para as suas propriedades, condição primordial para a resolução de problemas de construções geométricas.

Ao receber uma dica, o aluno lida com:

 a visualização de diferentes polígonos que podem satisfazer a uma ou mais dicas. Por exemplo: se o Jogador 2 fizer o lance (5,6) e o jogador 1, ainda pouco experiente com o jogo, disser: "Acertou um vértice do polígono B"; Dica: "É um vértice de um ângulo reto de um triângulo". O jogador 2 poderá produzir imagens mentais, tais como:

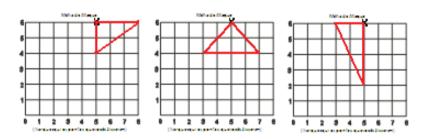


Figura 26: Três diferentes possibilidades para o triângulo retângulo

Agora é com você:

Existem outras posições para o ângulo reto?

Exploração de propriedades diversas

Ao dar uma dica, o aluno buscará e explorará diferentes propriedades, que envolvem diferentes conceitos geométricos, tais como:

- 1. Classificação quanto ao número de lados;
- 2. Classificação de um triângulo quanto aos ângulos;
- 3. Soma dos ângulos internos;
- 4. Ângulos agudos, obtusos e retos;
- 5. Lados paralelos e perpendiculares;
- 6. Perímetro;
- 7. Comprimento dos lados,
- 8. Ponto médio;
- 9. Área de uma figura;
- 10. Diagonais.

A formulação de conjecturas

Como um jogo que visa a localização de figuras no plano cartesiano e a identificação de sua natureza, a tática para vencer versa em analisar as condições apresentadas e estudar entre as possibilidades, qual delas é a mais indicada.

Fazer essa análise perpassa por um estudo, que consiste em mapear parâmetros e propriedades oferecidas como dicas ou a partir do desenho na malha, formulando conjecturas.

Quando o aluno desenvolve essa habilidade, ele também está se preparando para a resolução de problemas geométricos, pois está construindo uma teia de relações. Nesse sentido, o aluno desenvolve um maior aprofundamento conceitual, desligando-se das definições decoradas sem nenhum significado.

Raciocínio dedutivo

O pensamento lógico dedutivo é uma operação mental construída a partir de relações não observáveis. Ao tentar descobrir a figura geométrica a partir de

dados, o aluno elabora todo um raciocínio, com base numa lógica dedutiva, que por sua vez se respalda no conhecimento sobre o assunto, e direciona-se para uma conclusão.

Ao articular relações, em um primeiro momento, o aluno vai testando, verificando erros e acertos; essa habilidade vai sendo incorporada pelo aluno, tornando-se algo estruturado e possível de se adaptar a diferentes situações.

Ao buscar mapear os polígonos do outro jogador, o aluno buscará unir diferentes dicas, propriedades, utilizando diferentes raciocínios:

No caso em que o Jogador 2 (ver Figura 26) já tem a dica: "Acertou um vértice do polígono B no ponto (5,6)" e "É um vértice com ângulo reto de um triângulo", acerta outro vértice do polígono B em (7,6), ele:

- Com os dois vértices, identifica a posição de um dos lados;
- Com a informação do ângulo reto, deduz que outro lado está sobre a linha vertical 5;

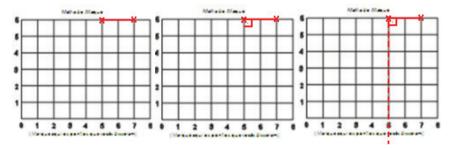


Figura 27: Processo para identificação do triângulo

• Ao mapear as possibilidades, o aluno identifica 4 posições possíveis para o último vértice: (5,3); (5,2); (5,1); (5,0).

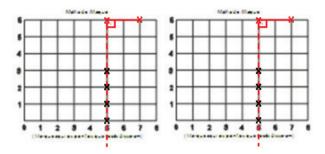


Figura 28: Possibilidades para o último vértice

Agora é com você:

Qual é a regra do jogo que o aluno tem que usar, no mapeamento, para excluir os pontos (5,4) e (5,5) como possíveis vértices do polígono B?

Novos Jogos Criados a partir de Modificação do Jogo dos Polígonos

O jogo pode variar a partir da identificação de regras e condições iniciais que podem ser alteradas, dificultando ou facilitando o jogo. Antes de ser iniciado o jogo são estabelecidas as condições iniciais, tais como:

- (i) dimensão e natureza da malha e posição dos eixos coordenados (pois pode variar, dependendo do nível de complexidade desejado). Podese optar por trabalhar com a malha com letra na vertical (na linha) e números na horizontal para crianças muito pequenas. Pode-se ainda para um 7º ano trabalhar com a malha com números positivos e negativos;
- (ii) o número de vértices e/ou as figuras geométricas que vão ser localizadas na malha;
- (iii) pode-se fixar em vez do vértice a área ocupada ou a soma dos perímetros;

(iv) pode-se determinar que cada uma das figuras ocupe aproximadamente uma determinada área, evitando que se coloquem figuras diminutas dentro da malha

Com exceção de se ter uma malha e de que as figuras geométricas são localizadas com seus vértices sobre os vértices da malha, todas as outras condições, como número de figuras, natureza destas, sobreposição ou não, podem ser alteradas, gerando novas versões do jogo. Assim, esse jogo abre margem para uma grande quantidade de possibilidades.

Num nível de escolaridade mais avançado podem-se deixar as figuras sem rótulos para que o jogador por meio das dicas tenha que juntar os vértices em cada figura.

Ficha de Atividades com o Jogo dos Polígonos

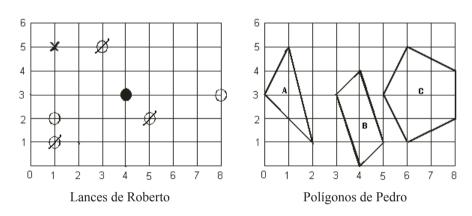
A título de exemplo iremos apresentar algumas propostas de atividades que podem ser aplicada com o uso do jogo dos Polígonos.

Atividade 1

Suponhamos que, em uma partida, Pedro havia desenhado, na sua malha de defesa, os três polígonos indicados na figura a seguir e já havia recebido seis lances de seu colega Roberto:

- as jogadas nos pontos (1,1), (3,5) e (5,2) que tinham caído fora dos três polígonos;
- o lance (1,2) atingira um dos lados do polígono A;
- a jogada no ponto (4,3) caíra no interior do polígono B;
- o lance no ponto (8,3) havia atingido um dos lados do pentágono

Quando, no sétimo lance, Roberto jogou no ponto (1,5), ele acertou em um dos vértices da figura A. Pelas regras do jogo, ele ganhou o direito de receber uma dica de Pedro, relativa a uma propriedade geométrica do polígono acertado. Por sua vez, ao dar essa dica, Pedro procura fornecer uma informação que ajude o menos possível Roberto a descobrir qual é o polígono A e onde está desenhado. Apresentamos, a seguir, algumas possíveis dicas e solicitamos que você analise essas dicas e procure descobrir as vantagens e as desvantagens nas escolhas que Pedro pode fazer.



Das pistas relacionadas abaixo, quais seriam mais indicadas a serem dadas, de modo que o jogador 1 tivesse mais dificuldades em identificar o polígono A e sua posição? Justifique.

- a) O ponto (1,2) é o ponto médio de um dos lados do polígono A.
- b) O ponto (1,5) é vértice de um triângulo escaleno.
- c) O ponto (1,5) é vértice de um polígono cuja soma dos ângulos internos é 180°.
- d) O ponto (1,5) é vértice do polígono A que tem um ângulo obtuso.

Atividade 2

Professor Mário resolveu promover uma alteração no Jogo dos Polígonos para trabalhar com seus alunos dos anos iniciais. Decidiu solicitar que os alunos fizessem quadriláteros, pentágonos e triângulos com um total de 12 vértices. Um aluno fez 4 triângulos. Que outras combinações de quadriláteros, triângulos e pentágonos poderiam surgir?

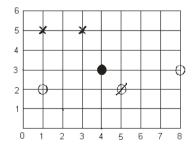
Atividade 3

Com o total de 12 vértices:

- a) É possível construir um polígono com 10 lados neste jogo?
- b) Quais as combinações possíveis de polígonos (quanto à quantidade de lados)?

Atividade 4

Maria está jogando com Tereza, e seu tabuleiro de lances está com a seguinte formação:



Dicas recebidas

- (8,3) é lado do polígono C.
- (1,5) é vértice do polígono A, com ângulo interno reto.
- (1,2) está em um dos lados do polígono A.
- (4,3) é ponto interior do polígono B.
- (3,5) é vértice do polígono A, os outros polígonos têm mais lados que este.
- a) É possível Maria saber quantos lados têm o polígono A? Se sim, que polígono é este?
- b) Quais as possíveis localizações dos outros vértices do polígono A?

Atividade 5

Elabore uma atividade que tenha como base o *Jogo dos Polígonos* e descreva os objetivos de aprendizagem da atividade.

Obs.: Esta atividade é destinada a formação do professor para o uso de jogos na Educação Matemática.

Capítulo IV

Jogo do NIM: um primeiro olhar

Gracivane Pessoa Martha Ferraz Ross Nascimento Airton Castro

Um Pouco de História

Existem várias versões para a origem do nome NIM, uns acreditam que vem do inglês arcaico, em que NIM significa apanhar; alguns observaram que NIM escrito invertido (WIN) significa vencer; existem outras suposições que afirmam ser a palavra de origem chinesa.

O material mais antigo que se tem conhecimento sobre este jogo foi escrito por Paul E. More, em outubro de 1899: "Um grupo de colegiais americano participava de um jogo interessante. Este era chamado de Fan-Tan". Três anos depois o matemático Charles L. Bouton [8] tornava-se o primeiro a analisar o Jogo do Nim apresentando uma teoria matemática para a estratégia de vitória no jogo.

Apresentaremos duas versões do jogo do NIM, sempre com dois jogadores (ou duas equipes) que jogam alternadamente. Ganha quem fizer a última jogada, ou seja, perde aquele que não puder mais jogar.

Uma Primeira Versão do Jogo do Nim

Material

Uma determinada quantidade de peças (como fichas, tampa de garrafa ou palitos), colocados em uma mesa. O número de peças deve ser determinado pelos jogadores, no início da partida.

Participantes

 Dois participantes (ou duas equipes) jogam alternadamente, que denominaremos de jogadores.

Regras do jogo

- 1. Os dois jogadores decidem com quantas peças iniciarão o jogo;
- 2. Tira na sorte o jogador que iniciará a partida;
- 3. Cada jogador, na sua vez, retira 1, 2 ou 3 peças;
- 4. Ganha aquele que retirar o último conjunto de peças.

Uma Segunda Versão do *Jogo de Nim* - Nim com Dados





Figura 29: Dados para o Jogo do Nim

Material

- Uma determinada quantidade de dados comuns. O número de dados deve ser determinado pelos jogadores, no início da partida.
- Esses dados têm faces numeradas de 1 a 6, de modo, que a soma dos valores de duas faces opostas é sempre 7 (1 + 6; 2 + 5 ou 3 + 4).

Participantes

 Dois participantes (ou duas equipes) jogam alternadamente, que denominaremos jogadores.

Regras do jogo

- 1. Começa-se por lançar o conjunto de dados sobre uma mesa;
- 2. Em sua vez, o jogador escolhe um dado e realiza uma jogada válida que pode ser de dois tipos:
 - Se a face de cima for maior que 1 vira o dado (uma rotação de 90°) de modo que o valor da face de cima figue menor;
 - b. Se a face superior for igual a 1, a jogada corresponde a retirar o dado do jogo.

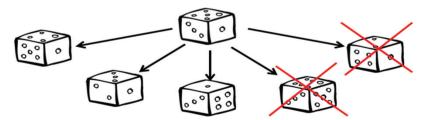


Figura 30: Possibilidades de jogada com 5 no dado

3. Ganha o jogo quem retirar o último dado do jogo.

Ficha de Atividades com o Jogo do Nim

Atividade I

Pedro e João estavam jogando o jogo do Nim. Na vez de Pedro, o tabuleiro estava assim:

Pedro afirmou: Já ganhei! Ele está correto, por quê?

Atividade II

No jogo do Nim, Manoel e Tereza decidiram iniciar com 3 peças. Quem vai ganhar o jogo?



Atividade III

No jogo do Nim, Manoel e Tereza decidiram iniciar com 4 peças. Quem vai ganhar o jogo?



Atividade IV

E com 5 peças, quem ganha?



Atividade V

Você pode descrever algumas posições a partir das quais você tem certeza da sua vitória, independente de como o seu adversário venha a jogar?

Atividade VI

Você consegue encontrar alguma posição (número de peças restantes na mesa) a partir da qual o jogo está perdido se o adversário jogar bem?

Jogo do Nim - Análise das Estratégias de Vitória

Depois de jogar algumas vezes, responda as seguintes questões:

- I. Você pode descrever algumas posições a partir das quais você tem certeza da sua vitória, independente de como o seu adversário venha a jogar?
- II. Você conseguiu encontrar alguma posição (número de peças restantes na mesa) a partir da qual o jogo está perdido se o adversário jogar bem?
- III. É vantajoso começar o jogo? Ou seja, quem começa sempre ganha?
- IV. A resposta da pergunta anterior depende do número de peças escolhida para começar o jogo?

Pode-se mostrar que em todo jogo de Nim um dos dois jogadores possui uma estratégia vitoriosa, ou seja, uma sequência de movimentos que garante a vitória, independentemente das escolhas de lances que o adversário venha a fazer. Desta forma as posições num jogo de Nim são de dois tipos:

 Posição de Perda: Um jogador se encontra na posição de perda se toda jogada que ele fizer, permitir ao seu adversário a elaboração de uma estratégia vitoriosa, ou seja, estando na posição de perdido só poderá jogar deixando o adversário na posição de ganho. Posição de Ganho: Um jogador se encontra na posição de ganho se a
partir dessa posição ele tiver uma estratégia vitoriosa, isso corresponde
a existir pelo menos uma jogada que deixe seu adversário na posição de
perda.



Figura 31: Diagrama de posições de perda e de ganho

Jogo do Nim com Dados - Análise das Estratégias de Vitória

Para analisar as estratégias de vitória no *Jogo do Nim com Dados*, analisamos primeiro a posições de perda e de ganho quando se joga com um dado para depois ampliar a análise para a situação com mais de um dado.

Análise de perda e ganho com um dado

Iniciamos a análise pela identificação das possibilidades de jogada em um dado. Classificaremos as posições possíveis em um dado.

Caso o jogador em sua vez tiver o número 1 voltado para cima, coletará o dado e terá ganho o jogo.

Caso o jogador tenha na face superior do dado o número 2, só haverá uma jogada, virar o dado para o 1 e, portanto, o outro jogador estará na posição de ganho. E nesse caso terá perdido.

Caso o jogador tenha na face superior do dado o número 3 terá como possibilidade virar para o 1 ou para o 2. Terá, portanto, uma possibilidade de posição de ganho e uma posição de perda para o outro jogador. Haverá, portanto, uma possibilidade de posição de ganho para ele, que corresponde exatamente colocar o outro jogador na posição de perda.

Face
$$4:4 \rightarrow 12$$
; Ganho

Caso o jogador tenha na face superior do dado o número 4 terá como possibilidade virar para o 1 ou para o 2. Como no caso do 3, terá uma posição de ganho.



Caso o jogador tenha na face superior do dado o número 5 terá como possibilidade virar para o 1, para o 3 ou para o 4. Terá, portanto, apenas possibilidades ganho para o outro jogador. Nesse sentido, terá em posição de perda.

Caso o jogador tenha na face superior do dado o número 6 terá como possibilidade virar para o 2, para o 3, para o 4 ou para o 5. Terá, portanto, duas possibilidades de colocar o outro jogador em posição de perda (2 e 5) e, portanto, terá em posição de ganho.

Apenas no caso do 2 e do 5, temos posições de perda.

Análise de perda e ganho com mais de um dado

Para analisar o jogo com mais de um dado, tem-se:

Caso 1: Sair apenas o número 1 nos dados. Ser uma posição de perda ou de ganho depende do número de dados, se é par ou ímpar.



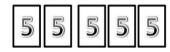
Com um dado com 1, temos uma posição de ganho; com 2 dados com 1, o primeiro o jogador tira um deixando o outro jogador em posição de ganho. Portanto, com dois estaremos em posição de perda. Caso tenham 3 dados com 1, retirará um e deixará o outro jogador em posição de perda, portanto, estará em posição de ganho... E assim, sempre que tiver um número ímpar de dado com 1 na face superior, estará em posição de ganho, caso tenho um número par de dados estará em posição de perda.

Caso 2: Sair apenas o número 2 nos dados.



Para cada dado com 2 que o jogador tiver, só terá uma jogada, virar para o 1.Portanto, o outro jogador retirará o dado virado deixando o primeiro jogador com a mesma situação, a de virar um dado com 2 para a posição 1. Nesse sentido, o jogador que tiver somente 2 nos dados estará numa posição de Perda

Caso 3: Sair apenas o número 5 nos dados.



Para cada dado com 5 que o jogador tiver, só poderá virá-lo para 1, 3 ou 4, todos que são posição de ganho. E poderá atuar nesse dado retirando-o ou deixando o primeiro jogador com todos os dados em posição de perda. Nesse sentido, o jogador que tiver somente 5 nos dados estará numa posição de Perda.

Caso 4: Sair dois dados com números iguais.



Posição de Perda

Se n for igual a 1, 2 ou 5, pelos casos anteriores, o jogador estará em posição de perda.

Se n for igual a 3 ou a 4, o jogador poderá virar um dos dados para 2 ou 1.

- No caso de virar para 2, o outro jogador pode virar o segundo dado para 2, deixando o primeiro jogador com dois dados com 2, uma posição de perda.
- No caso de virar para 1, o outro jogador pode virar o dado com 3 (ou 4) para a posição 1, deixando o outro jogador dois dados na posição 1, uma posição de perda.

Caso 5: Sair os dados com todos os números diferentes.

Olhando para o caso anterior, teremos que analisar os casos em que podemos virar os dados e conseguir chegar a duas faces iguais. Caso isto seja possível estaremos na posição de Ganho, pois colocaremos o outro jogador na posição de perda. A análise foi dividida em vários casos novamente:

• Uma das faces é 1.



Para qualquer número $n \neq 6$, o jogador poderá virar o dado n, para a posição 1. Portanto, para $n \neq 6$, teremos posição de Ganho.

Para n = 6, para qualquer número que se vire o 6, o jogador deixará o outro numa situação de 1 e outro número que pode ser virado para 1, portanto, estará numa posição de Perda.

• Uma das faces é 2.



Basta examinar para n > 2. Para qualquer número $n \ne 5$, o jogador poderá virar o dado n, para a posição 2, deixando o outro jogador com dois dados iguais a 2. Estará, portanto, em posição de Ganho.

Para n = 5, para qualquer número que se vire o 5, o jogador deixará o outro jogador com (2, 1) ou com (2, 4) ou (2, 3), todas posição de Ganho. Estará, portanto, em posição de Perda.

• Uma das faces é 3.



Basta examinar a situação para n>3. Se $n \ne 4$, o jogador por virar o dado para 3, deixando o outro com dois dados iguais a 3, uma posição de perda. Está, portanto, em posição de Ganho.

Se n = 4 o jogador só poderá virar o dado para 2 ou 1, ambas posições de ganho. O jogador está, portanto, em posição de Perda.

Uma das faces é 4



Basta examinar a situação para n>4, portanto, para n =5 ou n=6. Em ambos os caso, o jogador pode virar o dado para 4, deixando o outro jogador em posição de Perda. Está, portanto, em posição de Ganho.

O Que é Mesmo um Jogo de Nim?

O jogo descrito acima tem certas propriedades que são utilizadas para definir uma classe importante de jogos imparciais de estratégia; qualquer jogo que tenha estas propriedades é denominado Jogo de Nim.

- **Dois participantes:** Dois jogadores alternam-se efetuando jogadas (movimentos válidos), o jogador que não puder jogar perde o jogo.
- **Jogo de informação completa:** Ambos os jogadores possuem, em todos os momentos, informação completa sobre a situação. Xadrez e Damas têm esta propriedade, já dominó e baralho não.
- Jogo imparcial: Em cada posição do jogo as jogadas disponíveis não dependem de quem é a vez de jogar, o acesso a jogada é igual para ambos os jogadores. O jogo de Dama é um jogo no qual o acesso não é igual para os dois jogadores.
- Jogo determinístico: Não há interferência do acaso, as jogadas possíveis não dependem de um sorteio. O Xadrez é um jogo determinístico, o gamão não é.

• **Jogo finito:** Em qualquer posição a quantidade de jogadas válidas é finita além de não existir nenhuma sequência infinita de jogadas. Desta forma o jogo termina após um número finito de jogadas. Por exemplo, no *Mankala Colhe Três*, uma regra é necessária para evitar que certas partidas sejam infinitas.

Pode-se mostrar que em todo jogo de Nim um dos dois jogadores possui uma estratégia vitoriosa, ou seja, uma sequência de movimentos que garante a vitória, independentemente das escolhas de lances que o adversário venha a fazer

Capítulo V

Jogo dos Sinais

Esmeralda Marques dos Santos Airton Castro Paula Moreira Baltar Bellemain

História do Jogo

O *Jogo dos Sinais* foi desenvolvido por Esmeralda Marques dos Santos e orientado por Airton Castro e Paula Baltar Bellemain em 2000 no projeto de Iniciação a Docência. O mesmo jogo foi tema do trabalho de conclusão da licenciatura em Matemática da referida aluno, com o título: *Número Inteiro: Uma Proposta Didática* [9].

Características do Jogo dos Sinais

Material

- Um tabuleiro formado por 13 hexágonos, sendo 6 azuis (lado direito), 6 vermelhos (lado esquerdo) e 1 verde (casa central);
- Marcadores, um para cada jogador (tampas de garrafas de cores diferentes, por exemplo);
- Dois dados modificados (um azul e outro vermelho) numerados de 1 a 5 (veja anexo).

Participantes

De dois a quadro jogadores.

Objetivo do Jogo

Ganha o jogo aquele que conseguir sair primeiro do caminho pelo lado azul ou ficar sozinho no jogo (no caso em que os oponentes tenham saído pelo lado vermelho).

Regras

- 1. Todos os jogadores colocam seus marcadores na casa central (verde).
- 2. Determinam a ordem dos participantes por sorteio.
- 3. Na sua vez de jogar cada jogador lança simultaneamente os dois dados, o número que o dado azul indicar, será o número de casas que o jogador deverá percorrer à direita, o número que o dado vermelho indicar será o número de casas, que o jogador deverá andar à esquerda.
- 4. O jogador que sair do tabuleiro pela esquerda será eliminado do jogo; vence o jogador que sair do tabuleiro pela direita ou ficar sozinho no jogo.
- 5. Observe que, em cada jogada, o jogador terá que usar o resultado dos dois dados. Desta forma, o jogador só sai do tabuleiro depois de fazer a jogada correspondente aos dois dados. Caso o jogador saia pelo lado direito antes de usar o dado vermelho, deve primeiro andar para o lado esquerdo com o número do dado vermelho e só depois andar para o lado direito. O inverso deverá fazer caso saia primeiro pelo lado esquerdo.

Finalidades Educacionais

A principal finalidade deste jogo é introduzir de forma intuitiva a soma de números inteiros e a ordem neste campo numérico.

O número natural assume diversos usos sociais: quantidade, medida, ordenação, código. Estudos pautados na Teoria dos Obstáculos Epistemológicos,

desenvolvida pelo filósofo Gaston Bachelard [10] mostram que na evolução da sociedade o significado de contagem, assumido pelo número natural em seu surgimento, foi um grande empecilho que os números negativos fossem aceitos pelos matemáticos. Guy Brousseau [11] trouxe a teoria dos Obstáculos Epistemológicos para estudar os obstáculos apresentados pelos alunos em sua aprendizagem escolar, a essa teoria denominou Teoria dos Obstáculos Didáticos. Um dos temas, muito estudados de obstáculos didáticos (Rute Borba [12], Fernando Raul Neto [13]) é a aprendizagem do número negativo. Ross Nascimento [14], em sua dissertação de Mestrado, orientada por Verônica Gitirana, estudou os diversos obstáculos didáticos de natureza epistemológica presente em protocolos de alunos de Ensino Fundamental e Ensino Médio para operar com números negativos. Os estudos nessa linha apontam para a pouca oportunidade de o aluno tratar os números em contextos e significados que o número negativo faça sentido desde a introdução dos números naturais como uma das razões da repetição do obstáculo vivenciado pela humanidade. No ensino, o fato de enfatizar o número com o significado de quantidade promove um obstáculo para o aluno aceitar a existência do número negativo e para operar com o mesmo.

No *Jogo dos Sinais*, o número obtido no dado passa a indicar uma transformação de uma posição para outra posição por uma quantidade sucessiva de casas e um sentido, temos o número aparecendo como significado vetorial.



Figura 32: Tabuleiro do Jogo dos Sinais com marcador na posição 3

Se o jogador estiver na terceira casa a direita da casa verde e tirar três no dado vermelho. Esse três passa a indicar que a sua posição será deslocada três casas consecutivas para o lado esquerdo (no sentido da saída do lado vermelho), e chegará à casa verde.



Figura 33: Tabuleiro do Jogo dos Sinais com marcador na posição -1

Já no caso do peão desse jogador estar na primeira casa à esquerda e ele tirar 3 no dado vermelho. Esse três passa a indicar que a sua posição será deslocada três casas consecutivas para o lado esquerdo (no sentido da saída do lado vermelho) e chegará a quarta casa a esquerda da verde. No caso do dado azul, temos uma transformação para o lado direito; no caso vermelho, temos a transformação para o lado esquerdo.

Este jogo adapta os tradicionais jogos dos caminhos comuns na sociedade e de fácil acesso para uma criança, introduzindo-o o sentido do deslocamento. De forma intuitiva, a criança passa a lidar com a ampliação do significado dos números, introduzindo um bom contexto no qual o número negativo pode fazer sentido

Se é sorteado 4 (vermelho) e 5 (azul) ao caminhar 5 para o lado direito e 4 para o lado vermelho, ela estará fazendo a operação 5-4=1. Do mesmo jeito, ao tirar 5 (vermelho) e 4 (azul), ela estará podendo realizar a tarefa 4 para o lado direito e 5 para o lado esquerdo, ou a operação 4-5=-1, significará que no fim terá se deslocado de uma casa para o lado vermelho. A ampliação da possibilidade de subtrair um número maior de um número menor também será natural.

Além disso, o jogo permite lidar com dois significados do sinal "menos": o sinal do número (associado à parte da trilha na qual se situa o peão) e o sinal da operação (associado à cor do dado). Assim, se um peão se encontra em uma das casas vermelhas, sua posição corresponde a um número negativo; se ele se encontra em uma das casas azuis, sua posição corresponde a um número positivo. O número sorteado no dado vermelho indica um deslocamento para a esquerda, ou seja, uma subtração; enquanto o número sorteado no dado azul corresponde a um deslocamento para a direita, ou seja, a uma adição.

Ficha de Atividades com o Jogo dos Sinais

Atividade I

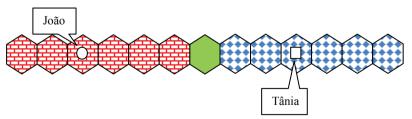
Observe na tabela os resultados dos lançamentos dos dados de André, Bárbara e Carlos na primeira jogada. Responda:

JOGADOR	DADO AZUL	DADO VERMELHO
André	4	4
Bárbara	3	5
Carlos	2	1

- a) Onde cada jogador parou depois desta rodada?
- b) Que jogador ficou em pior posição?
- c) Que jogador ficou em melhor posição?
- d) Quais os possíveis resultados no lançamento dos dois dados para um jogador que esteja na posição de partida chegar à mesma posição que ficou Carlos?

Atividade II

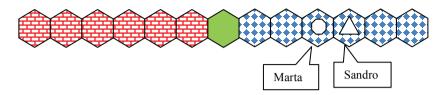
João e Tânia estão jogando o jogo dos Sinais, é a vez de João



- a) É possível que Tânia ganhe a partida sem precisar jogar? Como?
- b) Depois da jogada de João, que resultados no lançamento dos dados garantem a vitória de Tânia?

Atividade III

Observem no tabuleiro as posições de Marta e Sandro:



a) Sabendo-se que na jogada anterior Marta tirou 2 azul e 5 vermelho e Sandro 5 azul e 2 vermelho, onde eles estavam antes da rodada anterior?



b) Onde eles estariam se Sandro tivesse tirado 2 azul e 5 vermelho e Marta 5 azul e 5 vermelho?



Capítulo VI

Bingo dos Números Racionais

Maria Sônia Leitão de Melo Grácia Maria M. Montenegro Luciana Silva dos Santos Maria das Dores de Morais Paula Moreira Baltar Bellemain

Breve Histórico

O *Bingo dos Números Racionais* é uma adaptação do tradicional jogo do bingo, o qual, por sua vez, é uma variação dos jogos de loteria e começou a ser difundido na Europa por volta de 1500.

Há indícios de que o bingo tenha a sua origem atrelada ao hábito dos italianos, da província de Gênova, que nos séculos XIII e XIV costumavam definir a composição da Câmara e do Senado através de um sorteio. Os nomes dos candidatos que pleiteavam uma vaga nestas instituições eram escritos nas bolinhas e colocados em uma urna para serem escolhidos aleatoriamente mediante um sorteio.

Alguns registros relatam também que em 1495, os soldados do exército francês improvisavam um bingo nos intervalos das batalhas. Em 1539, Francisco I, rei da França, instituiu o sorteio de prêmios e destinava a arrecadação aos cofres públicos.

No Brasil, não se tem um registro histórico bem definido, mas ao que tudo indica o jogo é oficializado na década de 90 pela Lei Zico de incentivo ao esporte.

No âmbito educacional o bingo é utilizado com a finalidade de unir o lúdico ao didático com possibilidades de se introduzir, trabalhar ou consolidar conhecimentos escolares. Um dos exemplos de adaptação do bingo para fins pedagógicos pode ser encontrado no site do LIMC: Laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento no Ensino de Matemática e das Ciências da UFRJ.

Características do Bingo dos Números Racionais

Diferentemente do bingo tradicional, não é possível ter sucesso no *Bingo dos Números Racionais* contando apenas com a sorte. O jogo exige, dos participantes, concentração, raciocínio e mobilização de conhecimentos matemáticos. Nesta versão, o jogo é composto por cartelas contendo nove representações (figurativas ou simbólicas) de números racionais, como o exemplo abaixo:

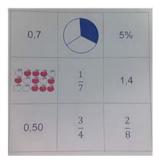


Figura 34: Exemplo de cartela do Bingo dos Números Racionais

As bolas dos tradicionais bingos foram substituídas por fichas contendo a leitura de diferentes representações de números racionais, sendo, portanto, em linguagem natural, como nos exemplos abaixo:

DOIS TERÇOS

UM INTEIRO E
VINTE E CINCO
CENTÉSIMOS

TRINTA E CINCO
POR CENTO

Figura 35: Exemplo de fichas do Bingo dos Números Racionais

Materiais

- 24 cartelas
- 20 fichas com a leitura de diferentes representações, em linguagem natural, de números racionais.
- Marcadores (grãos, bolinhas de papel, tampinhas, entre outros) em quantidade suficiente.
- Folhas de registro (uma para cada grupo de até três participantes).

Participantes

Todos os alunos de uma turma podem participar. Sugere-se que sejam formados duplas ou trios para cada cartela.

A cada partida um aluno poderá assumir o papel de chamador. Cabe ao chamador sortear uma ficha de cada vez, ler a expressão que consta na ficha em voz alta e dispor sobre a mesa ordenadamente as fichas sorteadas para conferência das cartelas ao final da partida. Esse papel também poderá ser desempenhado pelo professor da turma.

Objetivos do jogo

O grupo (dupla ou trio) que completar primeiro uma linha, coluna ou diagonal da cartela ganha o jogo, se todas as marcações estiverem corretas, após a conferência pela professora e pela turma.

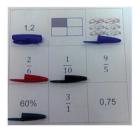


Figura 36: Exemplo de cartela vencedora

O grupo que estava marcando a cartela acima venceu a partida, quando foi chamado o número sessenta por cento, pois completou uma diagonal e uma coluna ao mesmo tempo, antes de qualquer outro grupo.

No exemplo a seguir, em outra jogada, o grupo vencedor foi o que conseguiu completar primeiro uma linha.

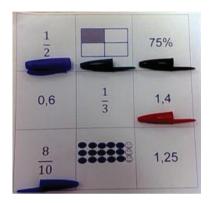


Figura 37: 2º exemplo de cartela do vencedora

Regras

- 1. Os jogadores devem ser divididos em grupos contendo, no máximo, três participantes.
- 2. Os participantes decidem se o professor será o chamador ou se algum aluno irá assumir esse papel. Combinam também quantas vezes o chamador deverá repetir a leitura de cada número.
- 3. Cada grupo recebe uma das cartelas que compõem o jogo, uma folha de registro e marcadores em quantidade suficiente.
- 4. Um dos componentes de cada equipe desempenha o papel de escriba e fica responsável por escrever na folha de registro todos os números chamados.
- 5. As fichas são embaralhadas, emborcadas e dispostas sobre a mesa.
- 6. O chamador sorteia uma ficha e a lê em voz alta lentamente e mais de uma vez para permitir que todos tenham a oportunidade de anotar na folha de

- registro e marcar na cartela. A quantidade de vezes que é feita a leitura depende do acordo feito no início do jogo.
- 7. O escriba de cada equipe escreve na folha de registro uma ou mais representações numéricas que correspondam à expressão que foi lida.
- 8. Cada equipe verifica se há alguma representação do número sorteado na sua cartela: representação figural de quantidade contínua ou discreta ou representação numérica fracionária, decimal ou percentual. Em caso afirmativo, marca na cartela e sinaliza na folha de registro.
- 9. Só pode ser marcado um número em cada jogada por cartela, pois não há na mesma cartela duas representações de um mesmo número.
- 10. O chamador organiza as fichas sorteadas sobre a mesa na ordem que foram chamadas para facilitar a conferência das cartelas
- 11. Quando alguma equipe declara que completou uma linha, coluna ou diagonal, toda a turma juntamente com a professora, confere se as marcações estão corretas. Se todas as marcações corresponderem a números chamados, a equipe será declarada vencedora da partida.
- 12. O jogo poderá ser continuado alternando os chamadores. Por exemplo, um dos membros do grupo vencedor, pode assumir o papel de chamador.

Observações: Em uma mesma partida pode haver revezamento em cada equipe em relação ao papel de escriba ou pode-se combinar que um aluno de cada equipe assume o papel de escriba e ao final de cada partida outro aluno assume esse papel. De todo modo, os demais membros da equipe podem participar do registro discutindo a representação feita pelo escriba.

Variação do Jogo

A complexidade do jogo aumenta, se forem manipuladas simultaneamente diferentes representações de um mesmo número (por exemplo, as expressões um meio, cinco décimos e cinquenta por cento são três maneiras diferentes de designar em linguagem natural o mesmo número racional). A variação do jogo proposta aqui consiste em adaptar as regras para levar os alunos a articular essas diferentes representações. Neste caso, serão feitos as seguintes adaptações ao jogo descrito anteriormente:

1. Cada ficha contém mais de uma expressão de um mesmo número racional, como nos exemplos a seguir:



Figura 38: Exemplo de fichas com várias representações de um mesmo número

- 2. O chamador escolhe apenas uma das expressões e faz a leitura em voz alta.
- 3. As equipes verificam se alguma das representações de sua cartela corresponde ao número sorteado. Por exemplo, se o chamador lê a expressão cinquenta por cento, a equipe poderá marcar 50%, mas também 0,5 ou 1/2 ou qualquer outra representação numérica ou figurativa que corresponda ao número chamado.
- 4. O papel de chamador poderá ser desempenhado por uma dupla ou trio.

Construção Didática dos Materiais do Jogo

Como se sabe, o bingo tradicional tem sua origem atrelada aos jogos de azar. Ganhar ou perder depende essencialmente do fator sorte aliado apenas à concentração para não esquecer de marcar um número chamado.

No âmbito educacional, adaptações desse jogo têm sido usadas como recurso didático com diferentes finalidades, como por exemplo, para reforçar aspectos referentes ao processo de alfabetização¹. Em matemática, o bingo é usado para favorecer o reconhecimento dos símbolos numéricos e a associação entre quantidades e representações numéricas ou para explorar propriedades do sistema de numeração decimal. Nos usos pedagógicos, de modo geral, a sorte não é suficiente para ter sucesso, pois a marcação na cartela exige que os alunos façam associações que dependem de conhecimentos adquiridos ou em via de aprendizagem.

O objetivo didático central do bingo de números racionais é explorar representações para os números racionais, estabelecendo relações entre diferentes representações para um mesmo número.

Uma das maneiras de representar um número é em forma de texto (linguagem natural): "um quinto", "sete décimos", "sessenta e cinco por cento" são expressões em linguagem natural que correspondem a números racionais.

Mas, afinal, o que são os números racionais? Números racionais são números que podem ser escritos na forma de fração. As expressões acima podem ser escritas numericamente como $\frac{1}{5}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{65}{100}$. Mas esses mesmos números, dentre inúmeras maneiras diferentes de representar, podem ser escritos como mostra o quadro abaixo:

^{1.} Adaptações do bingo como recurso para a alfabetização podem ser encontrados, por exemplo, no Manual didático – Jogos para alfabetização, desenvolvido pelo CEEL – Centro de Estudos em Educação e Linguagem da UFPE - disponível no http://www.ceelufpe.com.br/ceel-material-apoio.html

Em linguagem natural – por extenso	Em forma de fração	Em escrita decimal	Em forma de porcentagem
Um quinto	$\frac{1}{5}$	0,2	20%
Sete décimos	$\frac{7}{10}$	0,7	70%
Sessenta e cinco por cento	$\frac{65}{100}$	0,65	65%

Quadro 1: Diferentes representações de número racionais

Quando lidamos com frações, com números decimais ou com porcentagem, estamos manipulando números racionais. Além das representações em linguagem natural e das representações numéricas, os números podem ainda ser representados por figuras, como será detalhado adiante neste texto.

Com essa breve introdução, podemos perceber o quanto a aprendizagem dos números racionais exige uma reflexão cuidadosa por parte dos professores sobre o papel e o funcionamento dessas representações a fim de favorecer a aprendizagem pelas crianças desse importante conteúdo.

O nível 1 destina-se a alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, principalmente o 4° e 5° anos. No nível 2, o bingo está direcionado a alunos dos anos finais do Ensino Fundamental – do 6° ao 9° anos. Em ambas as versões, parte-se de expressões em linguagem natural oral para representações numéricas ou figurativas escritas. A escolha de pensar o jogo em dois níveis justifica-se pela percepção de que a construção do sentido dos números racionais e a apropriação de suas múltiplas representações são um processo de longo prazo que exige a abordagem desse tema na escola durante vários anos. Nossa intenção foi viabilizar a utilização do jogo por alunos dos diferentes anos/ciclos de aprendizagem do Ensino Fundamental, de modo que a cada momento a atividade representasse um desafio para os alunos do respectivo nível de escolaridade, mas que esse desafio não fosse excessivo, para não

desmotivar os alunos. A falta de desafio ou o grau excessivo de dificuldade poderiam comprometer o aspecto lúdico ou a exploração didática. Do nível 1 para o nível 2 alteram-se a composição das cartelas e das fichas para chamada dos números, ampliando a complexidade da atividade para os alunos. O quadro abaixo apresenta diferentes maneiras de representar o número "um meio":

Registros de representação				
Linguagem natural	Linguagem Figural	Linguagem Simbólica- numérica		
Um meio	Exemplo de representação figural de quantidade contínua ² :	Representação fracionária:		
Metade		1		
Três sextos		Fração irredutível: $\frac{1}{2}$ Frações equivalentes:		
Cinquenta cen-				
tésimos	Exemplo de representação figural de quanti-	$\frac{2}{4}$; $\frac{3}{6}$; $\frac{5}{10}$; $\frac{50}{100}$.		
Cinquenta por	dade discreta ³			
cento	***	Decimal: 0,5; 0,50; 0,500		
	\ \tag{\chi} \tag{\chi}	Percentual: 50%		

Quadro 2: Quadro de conversão de registros

Acima constam apenas alguns exemplos de representações, para ilustrar as diferentes maneiras de representar números racionais. Para cada número racional, há infinitas representações fracionárias – a fração irredutível (aquela

^{2.} Uma quantidade é dita contínua quando teoricamente pode-se dividi-la em partes sempre divisíveis, quando não há unidades separadas umas das outras. Tomando o exemplo acima, a área de uma figura representa uma quantidade contínua.

^{3.} Uma quantidade é discreta quando se constitui de unidades separadas e indivisíveis.

em que numerador e denominador não têm divisores comuns, além do número 1, que divide qualquer número) e todas as frações equivalentes a ela, que podem ser obtidas, multiplicando numerador e denominador por um mesmo número. Alguns desses números têm representação decimal finita. É o caso de 1/2 que pode ser representado, por exemplo, como 0,5. Neste caso, há também infinitas representações decimais, pois, como no exemplo acima, 0,5 pode ser representado como 0.50 ou 0.500 e assim por diante. Mas outros números racionais não têm representação decimal finita. Como é o caso do número 1/7 – são as dízimas periódicas. As frações que têm numerador 1 são chamadas de frações unitárias. Há ainda as representações simbólicas numéricas em forma de porcentagem, nos casos em que os números têm representação decimal finita. Nos exemplos acima de representações figurais temos: a área da parte pintada é metade da área do retângulo. Podemos representar qualquer fração por meio da área de um retângulo, pois, a área de uma figura é uma de quantidade contínua e por isso teoricamente pode-se dividi-la em qualquer quantidade de partes, as quais por sua vez são sempre divisíveis. Já no segundo caso, podemos usar frações para representar a razão entre a quantidade de estrelinhas pintadas e a quantidade total de estrelinhas. Neste caso, só podemos representar frações de denominador 1, 2, 3 e 6, uma vez que não se pode subdividir as estrelinhas.

Algumas dessas representações são familiares aos alunos de 2º ciclo e outras não. Pretendemos com o jogo contribuir para que os alunos se apropriem das diversas formas de representar os números e façam conexões entre essas formas, para entender que há jeitos diferentes de designar um mesmo número. A composição das cartelas e das fichas foi, portanto, resultante de uma análise didática minuciosa. No próximo tópico vamos explicitar e justificar algumas destas escolhas.

Composição das fichas do Bingo dos Racionais

As fichas do nível 1 trazem representações em linguagem natural de alguns números racionais familiares aos alunos de 2º ciclo, mas de modo a contemplar os diferentes tipos de representação explicitados acima. Nas fichas há expressões que indicam frações ordinárias, números decimais e porcentagem. Os números decimais têm até duas casas decimais após a vírgula, pois desta forma sua compreensão pode se apoiar nos contextos de medição ou do sistema monetário. As 20 fichas do nível 1 são:

Um meio	Um terço	Um quarto	Dois terços	Um sexto
Dez centésimos	Um inteiro e setenta e cinco centésimos	Um	Nove décimos	Quinze por cento
Três décimos	Um inteiro e vinte e cinco centésimos	Sete décimos	Um inteiro e cinco décimos	Sessenta por cento
Dois décimos	Um inteiro e dez centésimos	Quarenta por cento	Trinta e cinco por cento	Um por cento

Figura 39: Fichas para o nível 1

Já no nível 2, as fichas trazem uma ou mais de uma expressão para designar um mesmo número racional. Em cada ficha constam expressões em linguagem natural que indicam a fração irredutível que representa o número em questão, o número decimal (caso a representação decimal seja finita e tenha até duas casas decimais) e a porcentagem. A partir desse critério, compusemos as 25 fichas a seguir:

Um meio Cinco décimos Cinquenta por cento	Um terço	Um quarto Vinte e cinco centésimos Vinte e cinco por cento	Um quinto Dois décimos Vinte por cento
Um sexto	Um sétimo	Um oitavo	Um nono
Um décimo Dez por cento	Um centésimo Um por cento	Três meios Um e meio Um inteiro e cinco décimos Um inteiro e cinqüenta centésimos	Três quartos Setenta e cinco centésimos Setenta e cinco por cento
Cinco quartos Um inteiro e vinte e cinco centésimos	Dois quintos Quatro décimos Quarenta por cento	Três quintos Seis décimos Sessenta por cento	Quatro quintos Oito décimos Oitenta por cento
Seis quintos Um inteiro e dois décimos Um inteiro e vinte centésimos	Sete quintos Um inteiro e quatro décimos Um inteiro e quarenta centésimo	Oito quintos Um inteiro e seis décimos Um inteiro e sessenta centésimos	Nove quintos Um inteiro e oito décimos Um inteiro e oitenta centésimos
Três décimos Trinta centésimos Trinta por cento	Sete décimos Setenta centésimos Setenta por cento	Quinze centésimos Quinze por cento	Trinta e cinco centésimos Trinta e cinco por cento
Um Cem por cento			

Figura 40: Fichas para o nível 2

Como já foi dito, recomendamos o jogo no nível 2 para alunos de 3° e 4° ciclos (6° ao 9° ano). Amplia-se, portanto, o universo de números contemplados e de expressões em língua materna destes números sem, entretanto, exagerar no uso de números e expressões pouco usuais.

Composição das cartelas do Bingo dos Racionais

Em ambos os níveis, cada cartela é composta de nove itens dispostos em um quadro 3 por 3. Há oito representações de números que constam nas fichas e um item que não consta, o qual será chamado aqui de distrator. Vamos discutir brevemente esses distratores. Nas representações tanto figurativas como numéricas há erros frequentemente cometidos pelos alunos. Por exemplo, alguns alunos acham que 1,3 é uma representação do número "um terço", ou ainda que 2/3 pode representar "três meios". No primeiro caso, podemos interpretar que o número antes da vírgula representaria o numerador e o número após a vírgula representaria o denominador. No segundo caso, é como se fosse legítimo trocar numerador e denominador e manter o número inalterado. Quanto às representações figurativas, quando pensamos na relação parte-todo expressa pela área de figuras, alguns alunos não levam em consideração a necessidade de que a figura seja subdividida em partes de mesma área. Assim, pensam que a representação abaixo corresponde a "um quarto" porque a figura foi dividida em quatro partes e uma delas foi pintada (o que não é verdade uma vez que as partes não têm mesma área).



Figura 41: Exemplo de distrator para a fração 1/4

No caso da figura acima, a área da parte pintada representa 3/16 da área do triângulo. Para entender isso, podemos imaginar um ladrilhamento da figura com pequenos triângulos, como mostra a figura abaixo:



Figura 42: Ladrilhamento do triângulo

Em cada cartela de nível 1, há:

- duas representações figurais de quantidade contínua;
- duas representações figurais de quantidade discreta;
- uma fração;
- um número decimal com uma casa após a vírgula;
- um número decimal com duas casas após a vírgula;
- uma porcentagem;
- um distrator (figural ou numérico).

Há ainda os seguintes critérios para a composição das cartelas:

- A posição do distrator nunca é na diagonal, para colocar os participantes em igualdade de condições;
- Todas as cartelas têm alguma representação (figural ou numérica) do número "um meio";
- A representação de um meio e do distrator não podem estar na mesma linha ou coluna.

Neste nível, não se exige que o aluno relacione escritas numéricas entre si. Por isso, as representações numéricas correspondentes a cada ficha são:

Um meio – $\frac{1}{2}$	Dois décimos 0,2	Dez centésimos – 0,10	Um por cento 1%
Um terço – $\frac{1}{3}$	Três décimos - 0,3	Um inteiro e setenta e cinco centésimos - 1,75	Quinze por cento 15%
Um quarto – $\frac{1}{4}$	Sete décimos - 0,7	Um inteiro e vinte e cinco centésimos 1,25	Trinta e cinco por cento 35%
Dois terços – $\frac{2}{3}$	Nove décimos - 0,9	Um inteiro e dez centésimos 1,10	Quarenta por cento 40%
Um sexto – $\frac{1}{6}$	Um inteiro e cinco décimos - 1,5	Um – 1,00	Sessenta por cento 60 %

Figura 43: Fichas

Na composição das cartelas do bingo de nível 2 foram adotados os seguintes critérios:

- Todas as cartelas possuem alguma representação do número racional um meio, seja figural ou simbólica numérica: fracionária, decimal ou percentual.
- Todas as cartelas possuem um distrator (representação incorreta de algum número contemplado nas fichas).
- O distrator nunca está posicionado na diagonal.
- A representação de um meio e do distrator não podem estar na mesma linha ou coluna.
- O número que se encontra no meio é sempre um dos mais fáceis de identificar pelo aluno (o inteiro, uma fração unitária ou um número decimal).
- Nenhuma cartela possui duas representações do mesmo número.
- Cada representação utilizada aparece em pelo menos uma cartela.
 Cada cartela possui nove itens:
- a) uma fração unitária (fração cujo numerador), como por exemplo $\frac{1}{4}$;
- b) uma fração irredutível não necessariamente unitária, exemplo $\frac{3}{5}$;
- c) uma fração equivalente a uma das frações irredutíveis contempladas no jogo, exemplo: fração irredutível $\frac{1}{2} \approx \frac{2}{4}$ fração equivalente;
- d) um número decimal com uma casa decimal, exemplo 0,3;
- e) um número decimal com duas casas decimais, exemplo 0,25;
- f) uma representação percentual, exemplo 35%;
- g) uma representação figural de quantidade contínua (área de figura plana), como por exemplo:



h) uma representação figural de quantidade discreta, como por exemplo:



i) um distrator – possíveis erros dos estudantes, por exemplo os jogadores marcarem em sua cartela o número racional 3,10 quando deveria marcar o racional 3/10, ou 0,3 ou 30%.

Justificativa das Regras do Jogo

Os alunos podem assumir três tipos de papeis no jogo: chamador, marcador e escriba. No nível 1, não há muito interesse do ponto de vista dos objetivos em foco, em atribuir aos alunos o papel de chamador uma vez que a ele só cabe fazer a leitura em voz alta pausadamente da expressão em língua materna que consta na ficha sorteada. Já no nível 2, o chamador poderá escolher dentre as expressões que constam na ficha, aquela que irá ler em voz alta, o que envolve uma reflexão sobre vários modos de expressar em forma de texto um mesmo número racional.

Após a leitura da ficha (ou de parte dela, no caso do nível 2), o escriba da equipe vai escrever na folha de registro o número chamado, utilizando alguma representação numérica. Essa etapa é importante, pois por meio dela, os alunos fazem a passagem da expressão em linguagem natural para uma escrita simbólica. Esse registro é útil para a conferência da cartela quando alguma equipe declara ter completado uma linha, coluna ou diagonal. Além disso, poderá ser utilizado pelo professor para verificar se há entraves na compreensão da escrita de números racionais pelos alunos. Os demais membros da equipe podem opinar quanto à pertinência da representação numérica escolhida pelo escriba.

Em seguida, o(s) marcador(es) vão buscar identificar se algum dos itens de sua cartela corresponde ao número chamado. Essa identificação pode se basear na expressão verbal pronunciada oralmente pelo chamador ou na expressão numérica produzida pelo escriba.

A escolha de declarar vencedora a equipe cuja cartela tem uma linha, coluna ou diagonal completa tem duas razões:

- a duração de cada partida fica mais curta o que permite intercalar a ação dos alunos no registro e marcação dos números com uma reflexão sobre essa ação, mobilizada no momento da conferência da cartela;
- possibilitar a inclusão dos distratores, por meio dos quais será possível trabalhar os erros frequentes cometidos pelos alunos na aprendizagem das representações de números racionais e cuja superação é necessária para a apropriação plena das regras próprias de funcionamento de cada um dos sistemas de escrita de números racionais.

O momento da conferência da cartela vencedora é também uma oportunidade de reflexão sobre as escritas de números. É essencial que o professor compartilhe com a classe a responsabilidade por esse momento, uma vez que os argumentos que os alunos usam para justificar porque acham que cada um daqueles números corresponde efetivamente a um número chamado são importantes para a compreensão dos números racionais e suas múltiplas representações. Muitas vezes, do debate entre os próprios alunos brota uma compreensão mais ampla e superam-se entraves apresentados na aprendizagem das características dos sistemas de representação de números. Além disso, esse tipo de situação favorece o desenvolvimento da argumentação em matemática.

Finalidades Educacionais

O foco principal deste jogo é explorar as diferentes representações de números racionais. Espera-se que o *Bingo dos Racionais* favoreça nos alunos o desenvolvimento da capacidade de:

- Produzir escritas numéricas apropriadas para números racionais, a partir de expressões correspondentes em linguagem natural.
- Reconhecer que um número racional pode ser representado de diversas maneiras.
- Associar vários representantes (expressões em linguagem natural, representações figurativas de quantidades continuas e discretas e representações simbólicas numéricas em forma de fração, número decimal e porcentagem) a um mesmo representado (número racional).
- Articular diferentes representações de um mesmo número.

Discussão acerca das finalidades educacionais

O que foi discutido até o momento mostra claramente que, para vencer no jogo do *Bingo dos Racionais*, não basta ter sorte. É preciso mobilizar conhecimentos matemáticos que permitam transitar entre as diferentes maneiras de representar números racionais.

Dependendo do planejamento e das intenções do professor, o jogo pode ser trabalhado em momentos variados da aprendizagem, como por exemplo: para trazer à tona as hipóteses (corretas ou errôneas) que os alunos formulam sobre a escrita dos números (na sondagem dos conhecimentos prévios), após um trabalho sobre as representações fracionária, decimal e porcentagem para favorecer a articulação entre elas; após um trabalho sistemático com as representações para favorecer a fixação dos conteúdos e assim por diante.

O trabalho do pesquisador francês Raymond Duval [15] e seus colaboradores chama a atenção para a dependência que a atividade matemática tem da manipulação de representações semióticas e para a variedade de registros de representação mobilizados com a linguagem natural (verbal), a linguagem figural (com os desenhos) e a linguagem simbólica (numérica e algébrica). Nesse sentido, as representações semióticas assumem um papel primordial no âmbito da Matemática, porque os objetos de estudo dessa ciência, nem sempre são acessíveis ou perceptíveis, e só podem sê-lo mediante as suas diferentes formas de representações. Para lidar com ideias matemáticas (como é o caso do número racional) precisamos usar sistemas de símbolos (as letras que permitem expressar em palavras, as figuras, os números) e regras que permitem lidar com os símbolos, de modo a compartilhar significados, comunicar ideias, agir sobre as ideias, por meio da manipulação dos símbolos. A atividade matemática envolve, portanto, a apropriação das relações entre as ideias representadas (no nosso caso, número racional) e os sistemas de símbolos que permitem representá-las. Podemos representar os números racionais por meio de expressões verbais, conectadas à linguagem natural, por figuras ou por símbolos numéricos, nas formas fracionária, decimal e porcentagem. Duval destaca a necessidade de estabelecer conexões entre os vários registros como um aspecto importante da compreensão das ideias que são representadas. Esse embricamento entre conceito e representação faz com que propriedades da representação figuem "coladas", sejam assumidas como propriedades do conceito. Por exemplo, o número não é posicional, essa é uma propriedade do sistema de numeração decimal (a indo-arábica). Somente o uso de diferentes representações pode auxiliar o aluno a descolar o conceito da representação. Além disso, diferentes representações podem permitir um acesso mais claro a diferentes propriedades de um conceito. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais [16], em consonância com as pesquisas em Educação Matemática indica-se que a familiaridade do aluno com as diferentes representações numéricas dos números racionais (fracionária, decimal, percentual) pode levá-lo a perceber qual delas é mais adequada para expressar um resultado em uma dada situação. Por isso, é importante que os alunos lidem com as várias formas de representar os números racionais, que sejam capazes de articular essas diversas formas. Essa aprendizagem não é espontânea e exige um trabalho didático específico.

As sucessivas jogadas poderão favorecer o reconhecimento dos diferentes registros de representação em linguagem natural, figural ou simbólica (fracionária, percentual ou decimal) referentes ao número racional. O aluno interagindo com seus pares poderá comparar diferentes formas de representar o número racional. Consequentemente, a continuidade do trabalho com as representações favorecerá a ampliação do repertório de conhecimentos do aluno, no que se refere à leitura e escrita de números racionais.

Muitas vezes, na sala de aula, os significados e as representações de números racionais são trabalhados de forma fragmentada. É como se frações, números decimais e porcentagem, por exemplo, fossem conteúdos isolados. Do mesmo modo, quando se trabalha representações figurativas de frações, em nenhum momento se explicita que o contexto utilizado é a área de figuras planas. Em artigo publicado Educação Matemática em Revista, a professora Vilma Silva juntamente com outros professores [17] mostra que esse tipo de abordagem prejudica a construção, ampliação e consolidação de significados por parte do aluno e constroem uma proposta de trabalho alternativa. Confirmando essa observação, Luciana Santos [18] sinaliza que os alunos, no decorrer de sua trajetória escolar, parecem não se apropriar e utilizar adequadamente os diferentes registros de representação para um mesmo objeto matemático. Em relação aos números racionais, na melhor das hipóteses, a compreensão dos mesmos se restringe ao uso de um único registro de representação, ou suas ações neste universo encontram-se limitadas aos tratamentos possíveis entre diferentes registros. O estudo apresenta evidências de que a construção de significados para o número racional, por parte do aluno, está atrelada ao envolvimento do mesmo em atividades matemáticas que se apóiam no emprego de diferentes formas e registros de representação semiótica.

Na elaboração do bingo dos números racionais, nós também buscamos inspiração na Teoria das Situações Didática e na Engenharia Didática de Guy Brousseau [19]. Esse pesquisador evidencia, entre outras coisas, a importância do trabalho autônomo do aluno para a aprendizagem de conteúdos matemáticos. O caminho que toma é o de analisar profundamente as características das situações de ensino-aprendizagem e fazer escolhas pertinentes, de modo a minimizar a necessidade de intervenção do professor. Para tanto, foca sua análise do que chama de meio. O meio é um fator de desequilíbrios e contradições. Ao se deparar com novas situações, que colocam em cheque os seus conhecimentos prévios, o aluno percebe a necessidade avançar, de aprender mais sobre o assunto. Nesse processo, o meio utilizado pelo professor fornece indícios quanto à eficácia e a falibilidade das hipóteses e ações do aluno. Em uma situação didática de jogo, o aluno é conduzido por um percurso que o instigará no acionamento dos próprios conhecimentos ao elaborar hipóteses, criar e testar as próprias estratégias e as dos seus interlocutores.

No nosso caso, a presença dos distratores, a escrita numérica na folha de registro e a participação dos alunos na fase de conferência da cartela são motivados pela intenção de instalar um meio que permita ao aluno manifestar seus conhecimentos prévios, elaborar hipóteses, confrontar com as hipóteses formuladas pelos colegas, validar a pertinência de suas hipóteses ou ao contrário, tomar consciência de seus erros. Geralmente, na sala de aula, cabe única e exclusivamente ao professor declarar se uma produção do aluno está certa ou errada. Sob a ótica da Teoria das Situações Didáticas, parte do processo de validação pode ficar a cargo da própria turma, se a situação concebida pelo professor assim o permitir.

Por exemplo, digamos que uma equipe declara que completou uma linha, coluna ou diagonal e, portanto, é vencedora. Toda a turma vai averiguar se as marcações da cartela estão corretas. O chamador havia chamado "um terço" e a equipe marcou 1,3 como representação de um terço. Pode-se

instalar na classe um debate sobre a pertinência dessa representação. Em alguns momentos o professor poderá instigar os alunos e em outros, a própria turma poderá questionar e buscar convencer os colegas que há um erro na representação. Argumentos como o número 1,3 é maior do que um e "um terço" é menor do que um, podem ser usados pelos alunos. O mesmo ocorre em relação aos distratores de representações figurativas. O fato que as partes têm áreas diferentes pode ser sinalizado pelos próprios alunos. Dependendo da participação da turma, o professor precisará intervir mais ou menos, mas é possível que do próprio debate entre os alunos chegue-se a uma conclusão correta do ponto de vista da matemática. De todo modo, a participação dos alunos nesse processo é fundamental, pois ao tentar convencer os colegas de que marcou corretamente a cartela ou que algum número marcado não é correto, os alunos da turma irão aprender fatos importantes sobre os números racionais e suas representações simbólicas. Irão ao mesmo tempo desenvolver as capacidades de explicar ao outro como pensaram, de argumentar porque acham que estão certos, de buscar compreender como o outro pensou e de se deixar convencer pelos argumentos dos colegas. Os jogos são oportunidades preciosas para o desenvolvimento dessas capacidades e da autonomia visada.

Segundo Hector Ponce [20], a passagem do conjunto dos números naturais aos racionais não é imediata e requer um grande esforço conceitual, que supõe uma profunda ruptura com os conhecimentos do aluno até o momento, que tendem a associar as propriedades dos racionais àquelas que se referem aos números naturais.

Ao interagir com seus pares, jogando o bingo, o aluno vai perceber que o êxito na partida não depende apenas da sorte, mas, das associações que constrói por meio da percepção de que um mesmo número racional admite representações⁴ distintas.

^{4.} A representação é a forma sob a qual uma informação pode ser descrita e levada em conta em um sistema de tratamento. E, esse sistema, portanto pressupõe a ação de codificar as informações.

Uma análise com o número "um quarto".

Considerando as representações fracionárias deste número, temos a fração $\frac{1}{4}$ e todas as frações equivalentes a ela. As regras que regem a representação de $\frac{1}{4}$ são as mesmas que regem as demais representações fracionárias. Considerando a fração como a representação de uma relação parte-todo, o denominador representa em quantas partes equivalentes o todo foi dividido e o numerador representa quantas destas partes foram tomadas. Simbolicamente temos uma representação composta de dois números naturais com um traço horizontal entre eles.

- a) Por que dizemos que $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{8}$ são frações equivalentes? Porque as quantidades resultantes da ação de dividir em quatro partes equivalentes e tomar uma e da ação de dividir em oito partes equivalentes e tomar duas são as mesmas. Por exemplo, se tenho 8 carrinhos, divido igualmente entre meus quatro sobrinhos, a parte que cabe a cada um são dois carrinhos e equivale a "um quarto" da minha coleção. Mas posso também pensar que tomando a mesma coleção, cada carrinho corresponde a "um oitavo" da coleção e se dou dois carrinhos a cada um de meus quatro sobrinhos, cada um recebe "dois oitavos" da minha coleção.
- b) Do ponto de vista prático, obtemos frações equivalentes multiplicando por 2, 3, 4,... o numerador e o denominador de uma fração: $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{12}$ e assim por diante são maneiras distintas de representar "um quarto" como fração.

Considerando as representações decimais, que sentido vamos atribuir à escrita 0,25? A escrita decimal dos números racionais apoia-se e estende o sistema numérico decimal usado para expressar números naturais. No número 234 sabemos que o 2 indica duzentos (duas centenas), o 3 indica trinta (três dezenas) e o 4 indica quatro unidades. A vírgula do número decimal serve para separar a parte inteira e a parte decimal do número. A escrita 0,25 nos diz que o número tem parte inteira 0 (portanto, é menor que um inteiro) e parte decimal 25. Mas esse 25 não são duas dezenas e cinco unidades, como

nos números naturais, são 2 décimos e 5 centésimos. Mantém a característica posicional (o valor de um algarismo depende da posição que ele ocupa na escrita) e a característica decimal: do mesmo modo que 1 dezena corresponde a 10 unidades, temos que 10 décimos correspondem a 1 unidade ou ainda que 10 centésimos correspondem a 1 décimo. Por isso, 2 décimos e 5 centésimos correspondem a 25 centésimos. As características da escrita decimal são diferentes daquelas da escrita fracionária, mas ambas são representações que se apóiam em algarismos e símbolos. São sistemas de representação simbólica. Podemos traduzir uma escrita em outra, ou seja, perguntar como representar 0,25 na forma de fração. Inicialmente vamos escrever como fração decimal $\frac{25}{100}$ (esta fração é decimal porque seu denominador é uma potência de 10, no caso, 10²). Em seguida, usando o raciocínio baseado nas frações equivalentes, mencionado no item anterior, podemos obter outras expressões fracionárias deste mesmo número. Podemos, por exemplo, buscar a fração irredutível equivalente a 0,25 (como já foi dito, uma fração é irredutível quando o único divisor comum ao numerador e denominador é o número 1). Tomando a fração $\frac{25}{100}$ como ponto de partida, há divisores comuns há entre 25 e 100 diferentes de 1? 5 é divisor de 25 e de 100 ao mesmo tempo. Logo, essa fração não é irredutível e podemos dividir numerador e denominador por 5. Obtemos a fração $\frac{5}{20}$. Mais uma vez podemos perguntar se é $\frac{5}{20}$ ma fração irredutível e percebemos que é possível dividir tanto o numerador (5) como o denominador (20) por 5. Fazendo isso obtemos a fração $\frac{1}{4}$. O único divisor de 1 é ele mesmo (toda fração unitária é irredutível) e, portanto, $\frac{1}{4}$ é uma fração irredutível:

a)
$$0,25 = \left(\frac{25}{100}\right)_{.5}^{.5} = \left(\frac{5}{20}\right)_{.5}^{.5} = \frac{1}{4}$$

Outra maneira de buscar a fração irredutível é se perguntar dentre os divisores comuns de 25 e 100 qual o maior deles e dividir numerador e denominador por esse número. Os divisores de 25 são 1, 5 e 25 e os divisores de 100 são, 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 e 100. Logo os divisores comuns entre 25 e 100 são 1,

5 e 25 e o maior deles é o 25. Para obter a fração irredutível podemos dividir numerador e denominador diretamente por 25.

b)
$$0.25 = \left(\frac{25}{100}\right)_{.25}^{.25} = \frac{1}{4}$$

Nos dois caminhos acima, para obter a fração irredutível que corresponde à representação decimal, foi necessário passar da representação decimal (0,25) para uma representação fracionária $(\frac{25}{100})$, o que envolve relações entre diferentes sistemas de representação e também realizar modificações na representação fracionária (pelo uso de frações equivalentes), usando um mesmo sistema de regras de escrita.

Podemos observar ainda que na escrita decimal 0,25 é equivalente a 0,250 ou ainda a 0,2500 (25 centésimos é o mesmo que 250 milésimos ou ainda 2500 décimos de milésimos) e assim por diante. A compreensão deste fato pode se basear nas frações equivalentes.

Há ainda a representação em porcentagem. Que sentido vamos dar à escrita 25%? Se 25% das crianças da Escola Alegria de Aprender torcem pelo Santa Cruz, queremos dizer que a cada 100 crianças desta escola, 25 torcem pelo Santa Cruz. Ou seja, a razão entre a quantidade de crianças que torce pelo Santa Cruz e a quantidade total de crianças pode ser expressa em fração por $\frac{25}{100}$. Vimos no item anterior que essa fração corresponde tanto à fração irredutível $\frac{1}{4}$ como à escrita decimal 0,25. Mas entender que escritas tão diferentes umas das outras como 25%, 0,25, $\frac{25}{100}$ e $\frac{1}{4}$ correspondem a um mesmo número não é algo que se aprenda espontaneamente sem um trabalho didático intencional.

As representações discutidas acima são todas numéricas. Apoiam-se em sistemas compostos de algarismos e outros símbolos, como a barra da fração, a vírgula ou o %, que precisam ser apropriados pelas crianças para que possam lidar plenamente com os números racionais. Mas há também outros sistemas

de representação por meio dos quais lidamos com esses números, como é o caso das figuras. As figuras abaixo são também representações de $\frac{1}{4}$:

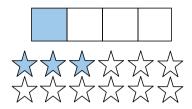


Figura 44: Representações do número 1/4

No primeiro caso, a área do quadradinho pintado representa $\frac{1}{4}$ da área do retângulo. Como já vimos, a área de uma figura é uma quantidade contínua, pois teoricamente pode ser sempre subdividida. No segundo exemplo, as três estrelinhas pintadas representam um quarto da quantidade total de estrelinhas (podemos pensar que as 12 estrelinhas são decompostas em quatro grupos de 3 estrelinhas cada e que pintamos um desses grupos). Esse segundo contexto é de quantidade discreta, pois partimos do pressuposto que não vamos poder subdividir as estrelinhas.

O contexto das quantidades contínuas é geralmente privilegiado, embora as pesquisas como as realizadas por Maurício Figueiredo Lima [21] mostrem que os alunos dominam mais facilmente as frações de quantidades discretas. Por isso, sentimos a necessidade de integrar nas cartelas representações figurativas de quantidades discretas.

Com relação às quantidades contínuas, o entrave observado é outro. Se por um lado os alunos identificam facilmente a representação acima com a fração $\frac{1}{4}$, não se pode dizer o mesmo sobre outras representações figurativas, como os exemplos abaixo:

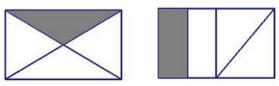


Figura 45: Frações com figures não congruas de mesma área

Nesses dois exemplos, os retângulos não são divididos em quatro partes iguais, mas em partes de mesma área, o que é suficiente para garantir que a área da parte pintada representa $\frac{1}{4}$ da área total da figura. Foram incluídos nas cartelas exemplos deste tipo a fim de ampliar a compreensão dos alunos sobre as representações figurativas de números racionais além daquelas mais frequentes no ensino habitual.

Diante do exposto, compreendemos que os processos de ensino e aprendizagem de números racionais pressupõem a ruptura com os modelos usuais que estão impregnados nas práticas docentes, marcados pela linearidade e fragmentação em pequenas porções, que são administradas em momentos estanques das aulas de matemática: primeiro se esgota o estudo de frações e operações com frações, depois vem o capítulo de números decimais e operações com números decimais e em outro momento se vê alguma coisa de porcentagem. Pouco investimento é feito no sentido de mostrar que se trata de maneiras distintas de representar os mesmos números. Além disso, o trabalho com a conversão entre escritas é visto como um processo mecânico, sem compreensão e sem propósito.

Continuação da análise das finalidades didáticas

O uso de jogos matemáticos pode contribuir para romper com essas práticas. Acreditamos que as sucessivas jogadas com o *Bingo dos Racionais*, sejam exitosas ou não, indicarão a necessidade de realizar transformações nos modos de representar os números racionais. A aprendizagem das convenções que regem cada sistema de representações e as passagens de um sistema a outro são aprendidos pelos alunos, por meio do desafio que o jogo coloca de ouvir uma expressão em língua materna que corresponde a algum número racional, produzir alguma escrita numérica correspondente a esse número, identificar na cartela se há alguma representação numérica ou figurativa correspondente (pode ser a escrita numérica que o aluno produziu, mas pode ser outra

escrita que exija estabelecer correspondência entre diferentes representações numéricas – decimal, fracionária ou em porcentagem). Motivados pelo prazer do jogo, os alunos desenvolvem potencialidades e com isso o jogo contribui para o despertar da criatividade, do interesse e do fazer matemático. Para tanto, é desejável que o jogo seja inserido em um conjunto mais amplo de ações didáticas e não algo isolado.

Como em qualquer jogo usado com finalidade educacional, é preciso buscar o equilíbrio entre a intencionalidade didática e a ludicidade. Toda a discussão conceitual e didática exposta neste texto tem o propósito de expor as reflexões que nortearam as escolhas feitas na elaboração do jogo, mas não precisam nem devem ser explicadas ao aluno, do modo como aparecem aqui. São subsídios para o professor entender mais profundamente a matemática e a didática subjacentes à elaboração do jogo, antecipar os entraves que podem esperar que apareçam na ação dos alunos, sugerir caminhos que ajudem a superação desses entraves.

A elaboração de um jogo como esse pressupõe o mapeamento de possibilidades de êxito e fracasso no jogo, o qual por sua vez, se apoia no conhecimento que se tem dos entraves que ocorrem na aprendizagem, da complexidade cognitiva exigida na atividade. Na gestão da vivência do jogo o professor vai coordenar o trabalho, mediar situações e tomar decisões frente a imprevistos em meio ao barulho e à empolgação. Por isso sugerimos que faça a análise das cartelas, antecipe diferentes escritas de cada uma das representações, localize os distratores a fim de se preparar para discutir a produção dos alunos no momento da conferência das cartelas. Isso também poderá subsidiar a elaboração de cartelas específicas para trabalhar com aspectos que a avaliação dos conhecimentos de sua turma mostre que precisam ser priorizados. Se sugerimos certa composição das cartelas e justificamos essas escolhas, também consideramos igualmente importante que o professor desenvolva a capacidade de pensar a construção de cartelas que lidem com os entraves que sua turma apresenta. As adaptações também podem ser feitas quanto ao

momento da aprendizagem (sondagem dos conhecimentos prévios, exploração das conexões entre representações, ou fixação dos conteúdos).

Mais algumas escolhas e suas razões.

Pensamos que as equipes deveriam ser organizadas em duplas ou trios. O trabalho coletivo permite que haja o debate de ideias entre os alunos, o que é importante uma vez que a atividade de identificar números convertendo formas distintas de representá-los é um desafio que pode ser melhor enfrentado com o apoio e colaboração entre os alunos. Optamos por grupos pequenos para que todos tenham uma boa visão da cartela. O professor deverá também ter o cuidado de utilizar cartelas de tamanho adequado a esse trabalho em grupo. Nada impede, entretanto, que em algum momento da aprendizagem o professor ache pertinente trabalhar com o bingo com uma cartela por aluno.

Os alunos podem assumir o papel de chamador, a fim de trabalhar a leitura em voz alta de expressões verbais que indicam números racionais, mas se isso ocorrer, é importante que haja rodízio entre eles. Essa escolha permite que o professor, liberado da função de chamador possa circular na turma, observar como os alunos estão lidando com o jogo, se apresentam alguma dificuldade e isso será útil na discussão da conferência das cartelas ou em momentos da aprendizagem desse conteúdo, independentes do próprio jogo. O rodízio se justifica para que diferentes habilidades sejam trabalhadas. Se um aluno passa a aula inteira como chamador não terá a oportunidade de mobilizar os conhecimentos em jogo na escrita dos números nem tampouco na marcação.

Tendo sido distribuídas as cartelas, antes de começar o sorteio das fichas, podese destinar algum tempo para que as equipes explorem a cartela, pelo menos por alguns minutos. O professor pode controlar o tempo com uma ampulheta ou simplesmente controlar o tempo emitindo alertas em alto e bom som. Esse momento pode ser útil para identificar maneiras alternativas de representar os números que constam na cartela. Mas é preciso cautela no sentido de não transformar essa exploração em uma atividade rotineira e mecânica que quebre com o desafio e o aspecto lúdico. Para evitar isso, é desejável que o professor evite dar instruções precisas do tipo escrevam de diferentes maneiras os números que constam na cartela. É bem diferente o aluno fazer isso por solicitação do professor ou ao contrário, perceber o interesse desta etapa por sua própria iniciativa. O professor pode simplesmente anunciar que os alunos dispõem de alguns minutos para observar a sua cartela, a fim de facilitar a marcação no momento da chamada.

Finalmente a função do escriba e da escrita numérica dos números sorteados justifica-se para que tenham um suporte que lhes permita argumentar a marcação dos números. Mas se nas primeiras vivências do jogo, o professor considerar que esse registro quebra a ludicidade pode excluir da regra. Á medida que os alunos tiverem se apropriado do jogo, mas apresentem os entraves esperados, a importância do registro poderá se mostrar mais claramente.

Atividades para a Formação de Professores

A título de exemplo iremos apresentar algumas sugestões de atividades que podem ser desenvolvidas na formação de professores em torno do uso do Bingo.

Atividade I

Identifique na sua cartela o item que cumpre a função de distrator. Do seu ponto de vista, a que número os alunos fariam corresponder o distrator e por quê?

Atividade II

Escolha outro conteúdo matemático do ensino fundamental e faça o esboço de um bingo, concebido segundo os mesmos princípios do Bingo dos Racionais. Elabore 3 cartelas e justifique sua composição.

Capítulo VII

Desafio das Operações

Evanilson Landim Alves Bruno Leite Dierson Carvalho José Ivanildo F. de Carvvalho Iolanda A. C. Almeida Franck Bellemain

Histórico do Jogo

O jogo "Desafio das Operações" surgiu dos trabalhos de um dos grupos do Curso de Jogos para o Ensino da Matemática com Sucata do Projeto Rede, inspirado nas dificuldades que muitos estudos, como os de Rute Borba [22], Fernando Raul [13] e Ross Nascimento [14], têm apontado no processo ensino-aprendizagem dos números inteiros. Dentre as dificuldades com os números inteiros, há aquelas inerentes às operações com os inteiros relativos. Com o Desafio das Operações buscava-se um jogo em que o aluno explorasse as operações com números inteiros, desenvolvendo as operações básicas.

Percebeu-se, porém, que a mesma ideia poderia propiciar um bom desenvolvimento da decomposição aditiva e multiplicativa de um número natural. E, como este projeto é direcionado também para os anos iniciais, desenvolvemos o jogo em dois níveis. O primeiro nível envolve apenas os números naturais e o segundo nível estende-o tomando os resultados das operações também nos números negativos. Outras versões podem ser feitas, estendendo-se o resultado para os racionais.

Características do Desafio das Operações

A seguir a descrição do material, número de participantes, objetivo, características e regras da primeira fase do Desafio das Operações.

Material

• Um tabuleiro constituído com dois conjuntos de números:



Figura 46: Desafio das Operações nível 1 – material emborrachado

- O primeiro com números que serão usados pelos alunos para realizar uma das quatro operações;
- O resultado a ser obtido faz parte do segundo conjunto de números do tabuleiro;
- Quatro (4) peões (um representando cada operação: adição, subtração, multiplicação, divisão);
- Nove (9) fichas que serão utilizadas para indicar o ganhador de uma rodada. Ganha quem tiver o maior número de fichas.

Participantes

Em cada nível do Desafio das Operações podem participar dois ou mais jogadores.

Objetivo do jogo

Capturar o maior número de fichas. Para tal, o indivíduo ou grupo deve acertar, dentre os números do primeiro conjunto, aqueles que chegam ao resultado indicado pelo oponente com uma operação estabelecida pelo oponente.

Características do jogo – nível 1

No exemplo do tabuleiro (Figura 46), a primeira linha é formada pelos números naturais 3, 6 e 12. Ao realizar todas as operações combinando um número, uma operação e outro número (adição, subtração, multiplicação e divisão), podem-se ter, no conjunto dos números naturais, 09 (nove) resultados distintos, como se vê no quadro a seguir:

ADIÇÃO	SUBTRAÇÃO	MULTIPLICAÇÃO	DIVISÃO
3 + 6 = 9	6 - 3 = 3	3 x 6 = 18	6:3=2
3 + 12 = 15	12 - 6 = 6	3 x 12 = 36	12:6=2
6 + 12 = 18	12 - 3 = 9	6 x 12 = 72	12:3=4

Quadro 3: Quadro das Operações possíveis

Os nove resultados distintos das operações vão formar as células do segundo conjunto, dispostos de forma ordenada no tabuleiro, que são: 2, 3, 4, 6, 9, 15, 18, 36 e 72.

Regras

- Os jogadores decidem quem vai começar o jogo (pode tirar no "par ou ímpar", jogar a moeda cara e coroa, etc);
- O primeiro jogador (ou equipe) escolhe uma operação e marca com o peão dessa operação um dos números do tabuleiro;
- O segundo jogador deve dizer dois números da linha superior
 (3, 6, 12) e com a operação indicada fazer uma operação que resulte no número marcado pelo primeiro jogador;
- Se os números pronunciados estiverem corretos, o segundo jogador retira da mesa (captura) uma das nove fichas a sua escolha; caso contrário, o primeiro jogador retira uma das nove fichas;
- A jogada seguinte será realizada pelo segundo jogador, independente dele ter acertado ou não os números que pronunciou.

Exemplo:

Eduarda e Davi estão jogando uma partida do Desafio das Operações.

Eduarda marcou no tabuleiro o número 15 com o peão adição .

Davi deve dizer que 15 é o resultado da adição entre 3 e 12 ou 12 e 3.

Se Davi pronunciar os valores esperados (corretos) por Eduarda, ele captura uma das nove fichas dispostas na mesa.

Caso, ele erre, Eduarda captura uma ficha da mesa.

 Vence o jogo o primeiro que capturar 5 das 9 fichas disponíveis na mesa. **Obs.:** pode ocorrer do jogador que está propondo o desafio tenha feito uma operação de forma errada. Nessa situação a pontuação será do outro jogador. Para essas situações, o professor funcionará como mediador.

Características do jogo - nível 2

O Desafio das Operações é constituído por dois níveis. O nível 2 foi desenvolvido com números e operações do Conjunto dos Números Inteiros. Assim, cabe ao professor decidir qual nível do *Desafio das Operações* é mais adequado para os seus alunos. Também, permite ao professor começar com o nível 1 e avançar para o nível 2, propiciando a discussão da extensão do campo numérico com a inclusão de todas os possíveis resultados das subtrações.

Ocorre que quando está envolvido apenas o conjunto dos números naturais (nível 1), as possibilidades de resultados são reduzidas devido ao fato de na subtração nos Naturais só ser possível quando o subtraendo é menor ou igual ao minuendo. Se a e b são números naturais, a-b só é possível em N (fechamento em N) se $b \le a$. Condição esta que limita as operações no conjunto dos números naturais. Quando se trabalha com os números inteiros é possível, nesse conjunto, a subtração a-b, mesmo quando b > a e a e b são números inteiros quaisquer.

Com esta alteração, as possibilidades são ampliadas, ou seja, os resultados possíveis com as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão vão ser em maior número. Com os três primeiros números do tabuleiro do nível 1, por exemplo, podem-se obter também os seguintes resultados inteiros:

3 - 6 = -3	3 - 12 = -9	6 - 12 = -6
	· /	

Com isso, o mesmo tabuleiro do nível 1 pode ser reaproveitado no nível 2, desde que ampliada a quantidade de fichas no tabuleiro de 9 para 12.

É importante que o grau de dificuldade do Desafio das Operações nível 2 seja compatível com o desenvolvimento dos estudantes.

Escolhas Didáticas

Na intenção de trabalhar habilidades de operações, optamos por não envolver uma grande quantidade de números, principalmente quando este for aplicado nos anos iniciais. Esse aumento na quantidade de números dificultaria a criança de realizar uma grande quantidade de combinações. Ao adotar três números para compor o conjunto sobre o qual vão incidir as operações, e combinar estes números dois a dois com cada uma das operações, poderia a princípio obter-se 24 resultados. No entanto, como na primeira versão do jogo, algumas dessas operações resultam no mesmo número, por diversas questões uma delas é a comutatividade da adição e da multiplicação. Além disso, podese obter um mesmo resultado com diferentes operações e combinações de números. O resultado 3, por exemplo, obtém-se fazendo 9-6, 6-3 ou 9/3. Assim, a quantidade de resultados distintos para o conjunto de número 3, 6, 9 é nove opções.

Considerou-se ainda a disposição dos números em cada um dos conjuntos em ordem crescente para facilitar a sua localização pelo aluno.

Para construir o tabuleiro, optou-se por ter como base uma malha hexagonal e os números escritos nas células (que são os hexágonos). Com este procedimento pode-se utilizar o mesmo tabuleiro para uma grande variedade de números, e a mesma ficha pode ser utilizada a frente e o verso. Com as mesmas peças, podem-se ter dois jogos distintos, evitando-se a necessidade de confeccionar um tabuleiro para cada jogo e este tabuleiro pode ser aproveitado

para outro conjunto de células. Na Figura 47, fizemos o tabuleiro e as fichas com o reaproveitamento de sobras do material emborrachado. Os peões que representam as operações foram confeccionados com tampinhas plásticas. Para diferenciar o conjunto dos números em que vão incidir as operações dos resultados destas, utilizou-se cores diferentes, isto é, num conjunto os números foram escritos em vermelho e no outro em preto. Isso facilita na colocação dos números no tabuleiro.



Figura 47: Desafio das Operações nível 1 – material emborrachado

O tabuleiro e as fichas podem também ser confeccionados com papelão de cores diferentes ou pintados. A Figura 48 ilustra esta opção. O tabuleiro foi confeccionado com dois papelões sobrepostos (de forma similar ao do emborrachado), pintados de cores diferentes.



Figura 48: Desafio das Operações nível 1 – material papelão

Ficha de Atividades com o Desafio das Operações

Atividade I

Rosilda e Valquíria resolveram criar um tabuleiro do Jogo Desafio das Operações e estavam aproveitando algumas fichas de outros jogos. Estas fichas eram 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 15, 16, 18, 24, 32, 36, 48, 56, 64, 68, 72.

- a) Sendo um tabuleiro composto por 4 fichas em que incidem as operações e 12 fichas com resultados, que números poderiam ser escolhidos para cada conjunto de fichas?
- b) Existem outras opções?

1		3	6		12
2		4			7
9	9		11		15
18	18		6		72

Atividade II

João e Pedro resolveram estender o jogo para criar a versão com números racionais (positivos). Iniciaram com os números 2, 6, 10.

- a) Quantas fichas precisarão para incluir todos os possíveis resultados nos racionais positivos?
- b) Quais são elas?

Capítulo VIII

Bingo das Grandezas e Medidas

Paulo Figueiredo Lima Paula Moreira Baltar Bellemain

Introdução

Como o Bingo dos Números Racionais e os demais bingos criados por formadores do Projeto Rede, o *Bingo das Grandezas e Medidas* é inspirado do jogo tradicional de bingo, mas exige dos jogadores além da atenção e da sorte, a mobilização de conhecimentos matemáticos para chegar à vitória.

O jogo é composto por cartelas contendo nove itens, como no exemplo a seguir:

R\$ 545,00	400 gramas	5 litros
400 quilogramas		/WM
O centímetro	3 metros	2 meses

Figura 49: Exemplo de Cartela

Os itens contemplados em cada cartela são:

- Valor monetário;
- Massa;
- Capacidade;
- Tempo;
- Figura desenhada na malha;
- Ilustração de um instrumento de medida;
- Unidade;
- Comprimento;
- Distrator.

Na cartela do exemplo, o distrator é 400 quilogramas. Como consta na cartela a massa 400 gramas (correspondente a uma bola de futebol), espera-se trabalhar a ideia que o número não é suficiente para caracterizar a grandeza, pois 400 quilogramas é bem diferente de 400 gramas, embora o número seja o mesmo e se trate em ambos os casos da grandeza massa.

As bolas dos tradicionais bingos foram substituídas por fichas contendo um texto relativo ao campo das grandezas e medidas cujo complemento se encontra nas cartelas. Vejamos alguns exemplos de fichas:

Para que um copinho plástico se decomponha totalmente é preciso mais ou menos Respostas: 50 anos ou meio século	Uma bola de futebol "pesa" aproximadamente Resposta: 400 gramas ou meio quilograma
Essa laranja "pesa" aproximadamente Resposta: 150 gramas	A área da figura pintada é de 2 centímetros quadrados.
A montanha mais alta do Brasil é o Pico da Neblina, localizado no Amazonas, na divisa com a Venezuela. A altitude do Pico da Neblina é de aproximadamente Resposta: 3000 metros ou 3 quilômetros	Eu sou um instrumento de medida de tempo Respostas: relógio, cronômetro, ampulheta

Uma tonelada corresponde a Resposta: 1000 quilogramas	Eu sou uma unidade de comprimento Respostas: metro, centímetro, milímetro, quilômetro, pé, polegada
O comprimento desta caneta é de aproximadamente Resposta: 15 centímetros	O "peso" deste pacote é de aproximadamente Resposta: 1 quilograma
O valor atual do salário mínimo no Brasil é de Resposta: R\$ 622,00	A altura da porta da sala de aula é de mais ou menos Resposta: 2 metros
A capacidade desse recipiente é de aproximadamente Resposta: meio litro	A unidade mais apropriada para medir a massa desta bolinha de gude é Resposta: o grama

Figura 50: Exemplo de fichas do Bingo das Grandezas

Embora as fichas tragam algumas respostas possíveis e aceitáveis, o professor, ao dar o comando, não deverá ler essas respostas. Como se trata muitas vezes de valores aproximados, não significa que as expressões sejam equivalentes. Por exemplo, meio quilograma é equivalente a 500 gramas, mas 400 gramas e meio quilograma são ambos valores aproximados (com maior ou menor precisão) para a massa da bola de futebol.

Algumas das fichas remetem a objetos familiares que deverão ser selecionados pelo professor. É o caso de materiais escolares (caneta, livro didático, caderno, borracha, etc.), brinquedos (bola de gude, pião, ioiô), recipientes (garrafa pet, frasco vazio de detergente, lata de óleo, etc.) ou alimentos (laranja, cebola, cenoura, pacote de feijão, arroz, farinha, açúcar, etc.). O professor poderá escolher os objetos familiares aos alunos e deverá verificar suas medidas aproximadas, nas unidades escolhidas.

Como um dos itens contemplados na cartela é o valor monetário e há variações nos preços dos produtos, constam nas cartelas valores fixos e cabe ao professor pesquisar produtos cujos valores aproximados sejam aqueles que constam nas cartelas. Portanto, as fichas relativas a valor monetário deverão

ser periodicamente atualizadas. Podem-se utilizar encartes de supermercado na busca de precos plausíveis.

Materiais

- 30 cartelas:
- 60 fichas com expressões em linguagem natural, associadas ao campo das grandezas e medidas;
- Objetos familiares aos participantes;
- Marcadores (grãos, bolinhas de papel, tampinhas, entre outros) em quantidade suficiente;
- Folhas em branco para registro livre das equipes.

Participantes

Todos os alunos de uma turma podem participar, individualmente, em duplas ou em trios, marcando nas cartelas os itens chamados.

O(a) professor(a) deverá assumir o papel de chamador, o qual consiste em sortear uma ficha de cada vez, ler a expressão que consta na ficha em voz alta e dispor sobre a mesa ordenadamente as fichas sorteadas para conferência das cartelas ao final da partida.

Objetivos do jogo

O aluno ou grupo (dupla ou trio) que completar primeiro uma linha, coluna ou diagonal da cartela ganha o jogo, se após a conferência pelo professor e pela turma, todas as marcações estiverem corretas.

Regras

1. Os jogadores podem ser divididos em grupos contendo, no máximo, três participantes. As cartelas também podem ser individuais.

- 2. Cada grupo recebe uma das cartelas que compõem o jogo, uma folha em branco e marcadores em quantidade suficiente.
- 3. O chamador esclarece que o comprimento do lado do quadradinho pequeno da malha é de meio centímetro, que as ilustrações correspondem a instrumentos de medida e que só pode ser marcado um item em cada jogada por cartela, pois não há na mesma cartela duas representações correspondentes a um mesmo item.
- 4. Os participantes combinam quantas vezes o chamador deverá repetir a leitura de cada ficha e decidem se será fixado o tempo disponibilizado para cada marcação.
- 5. As fichas são embaralhadas, emborcadas e dispostas sobre a mesa.
- 6. O chamador sorteia uma ficha e a lê em voz alta lentamente, respeitando a quantidade de vezes combinada, bem como o tempo para marcação.
- 7. Cada jogador ou equipe verifica se algum item da sua cartela corresponde à ficha chamada. Em caso afirmativo, marca na cartela. Se desejarem, os jogadores podem fazer registros espontâneos na folha em branco.
- 8. Quando alguma equipe declara que completou uma linha, coluna ou diagonal, toda a turma juntamente com o(a) professor(a), confere se as marcações estão corretas. Se todas as marcações corresponderem a números chamados, a equipe será declarada vencedora da partida.

Indicações Didáticas

O texto que se segue visa explicitar conhecimentos matemáticos e didáticos subjacentes ao jogo a fim de contribuir para que os professores façam um uso do mesmo no qual o aspecto lúdico seja preservado e, ao mesmo tempo, as aprendizagens visadas sejam favorecidas.

O campo da matemática escolar em foco neste jogo é o das grandezas e medidas. Desde meados da década de 90, o ensino das grandezas e medidas tem sido valorizado nas recomendações curriculares. Essa tendência se

verifica no Brasil, com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental (PCN) [23] e [16] bem como nas edições sucessivas do Guia do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) [24], [25] e [26]; no estado de Pernambuco, com a Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino (BCC-PE) [27], mas também nas recomendações curriculares de outros países como, por exemplo, os Estados Unidos [28]. Um dos indícios dessa valorização é o fato de se designar nesses documentos as grandezas e medidas como um dos domínios da matemática escolar.

O papel das grandezas e medidas na matemática escolar se apoia em algumas características desse campo, tais como sua relevância social, as possibilidades de articulação com outros campos da matemática e a riqueza das conexões com outros componentes curriculares.

Com efeito, o campo das grandezas e medidas tem presença marcante nas práticas sociais. Na vida cotidiana, são várias as atividades que envolvem grandezas e medidas. Por exemplo, na cozinha, lidamos com: capacidade e massa, ao seguir uma receita ou ao decidir as quantidades de ingredientes a serem utilizadas; com temperatura, ao escolher a graduação adequada para o forno e com tempo, para controlar a duração do cozimento de algum alimento, entre outros usos. Na feira ou no supermercado, lidamos com: massa e capacidade ao estimar as quantidades aproximadas de produtos de que necessitamos; com valor monetário ao comparar preços de produtos equivalentes: e com razões entre grandezas quando nos questionamos se é mais vantagem comprar o detergente de 2L ou o de 0,5L, por exemplo. Neste último caso, tomando produtos de qualidade equivalente, a decisão é baseada no cálculo, ou na estimativa, do valor da grandeza quociente preço/litro (por exemplo, "dois reais por litro"). Diversas atividades profissionais também envolvem grandezas e medidas. A grandeza comprimento, por exemplo, está fortemente presente nas atividades de marceneiros, pedreiros, engenheiros, arquitetos, costureiras, trabalhadores rurais, etc. Profissionais de saúde como médicos, enfermeiras, dentistas também utilizam grandezas e medidas, ao

decidir que quantidade de determinado medicamento deve ser prescrita para um paciente ou ao ministrar um tratamento. Um erro grosseiro na quantidade de medicamento a ser dada a um paciente pode ter efeitos catastróficos para a saúde.

Em muitas das situações acima, o que está em jogo é a estimativa de medidas de grandezas. A familiaridade com o contexto é um elemento importante para desenvolver essa capacidade de estimar. Um agricultor, por exemplo, pode semear a distâncias regulares de aproximadamente 10 centímetros os pés de alface nos leirões de sua horta, sem precisar usar qualquer instrumento de medida.

Entretanto, a estimativa de medidas de grandezas precisa ser desenvolvida por todos, como condição para o exercício pleno da cidadania. Por exemplo, uma dona de casa, ao fazer as compras do mês estabelece alguns critérios para estabelecer se o quilo de feijão "está caro" ou "está barato". O mesmo para a bandeja de ovos ou uma caixa de sabão. Mas nem tudo pode depender da memória. Não se trata de um repertório, com valores fixos e precisos para cada produto, mas de uma noção aproximada. A leitura crítica de informações veiculadas pela mídia também depende de as pessoas serem capazes de dar sentido a quantidades e para isso é preciso internalizar um sistema de referência que permita ordenar grandezas. Quando é noticiado que certa cidade produziu em uma semana uma tonelada de lixo, surgem alguns questionamentos: Isso é muito? É pouco? Está aumentando? Diminuindo? Mantendo certa estabilidade? Quanto representa uma tonelada? Não basta saber converter unidades de medida para atribuir algum sentido a informações como esta, nem tampouco memorizar uma grande quantidade de informações. É preciso criar referências, comparar, estabelecer relações, a partir de contextos e informações que tenham algum sentido para as crianças.

Outro aspecto importante no estudo das grandezas e medidas são as conexões com outras disciplinas. Por exemplo, é possível articular matemática com ciências, quando, ao estudar os animais, são trabalhadas características das

espécies como a massa ("peso"), a duração da gestação, ou o tempo médio de vida, ou ainda quando se exploram informações sobre meio ambiente como o tempo de decomposição de materiais, a quantidade de lixo produzida ou o desperdício de água. Também se pode conectar matemática com geografia ao estudar o relevo (altitude de montanhas, por exemplo) ou a hidrografia (extensão de rios, por exemplo).

Finalmente quanto às articulações internas à matemática, pode-se destacar o estudo das grandezas geométricas (comprimento, área, volume e ângulo) que estabelece uma forte conexão com a geometria e o papel das medidas de grandezas na construção do sentido dos números racionais. Para compreender comprimento ou área, por exemplo, é preciso lidar com linhas e com figuras, observar suas características, modificar as figuras (decompor e recompor, ampliar, reduzir, entre outras) e verificar se suas propriedades (inclusive comprimentos e área) são modificadas. Quando nos deparamos com situações de medida, percebemos rapidamente que os números naturais não são suficientes. Por exemplo, se usamos um palito de picolé para medir a largura e o comprimento do tampo de uma mesa, muito provavelmente as medidas não serão ambas inteiras. Podemos obter 10 palitos e um pouquinho ou quase 14 palitos, mas muito dificilmente teremos tanto o comprimento como a largura, expressos com medidas naturais.

Apesar dessa forte presença das grandezas e medidas na vida em sociedade e de suas ricas conexões, são muitos os entraves encontrados na aprendizagem de conteúdos desse campo. Um estudo relativo aos dados do INAF (Indice Nacional de Alfabetismo Funcional) que investigou o letramento matemático de jovens e adultos [29] mostra o baixo desempenho em tarefas do campo das grandezas e medidas, inclusive se comparado aos demais campos da matemática. Para uma discussão mais minuciosa do ensino e aprendizagem das grandezas e medidas no ensino fundamental, convidamos o leitor a consultar o capítulo referente a esse tema na publicação *Explorando o Ensino - Matemática* [30], organizada pela coordenação da área de Matemática

do Programa Nacional do Livro Didático (Prof. João Bosco Pitombeira de Carvalho). Esse livro⁵, publicado pelo MEC em 2010, foi enviado às escolas públicas brasileiras e pode ser adquirido em versão digital no Portal do MEC.

Do ponto de vista da construção conceitual, um dos aspectos importantes do campo das grandezas e medidas é a distinção entre dois domínios distintos e interligados:

- a) objetos ou fenômenos;
- b) grandezas associadas a esses objetos ou fenômenos.

Por exemplo, uma panela tem massa, tem capacidade, seu fundo tem uma área e o diâmetro do fundo da panela tem um comprimento. Ou seja, ao objeto panela podem-se associar várias grandezas. Outro exemplo: um evento qualquer tem associado a ele uma duração, que é uma grandeza (tempo). Cada uma dessas grandezas pode ser medida com unidades de mesma natureza. Ou seja, não poderemos medir a massa da panela, ou a duração de um evento, em centímetros nem tampouco medir o diâmetro do fundo da panela em quilogramas. Um dos aspectos a serem trabalhados no campo das grandezas e medidas é a identificação entre a grandeza massa e unidades de massa, entre a grandeza volume e unidades de volume, entre a grandeza tempo e unidades de tempo e assim por diante.

Estando claro qual grandeza é considerada, escolhemos a unidade pelo critério de praticidade. Do ponto de vista conceitual, pode-se usar qualquer unidade de medida de comprimento para medir comprimentos. Mas, do ponto de vista prático, é muito pouco adequado medir a distância entre Recife e Petrolina usando milímetros, pés ou passos. É nitidamente mais conveniente medir essa distância em quilômetros.

Há algumas confusões bem conhecidas entre massa e capacidade e entre

^{5.} O livro supracitado está disponível no site do Projeto Rede, por trazer bons subsídios para a prática dos professores não só no campo das grandezas e medidas como nos demais campos trabalhados nos jogos elaborados neste projeto.

área e perímetro. Perceber a distinção entre diferentes grandezas, mas que são fortemente articuladas, é também um desafio do ensino-aprendizagem das grandezas e medidas.

O *Bingo das Grandezas e Medidas* pode ajudar no enfrentamento desses desafios.

Objetivos educacionais

- Distinguir as grandezas massa e capacidade;
- Distinguir as grandezas comprimento e área;
- Associar unidades de medida às grandezas correspondentes;
- Identificar instrumentos de medida associados a cada grandeza;
- Estimar medidas de grandeza em contextos significativos;
- Estabelecer conexões entre a matemática e outras disciplinas como ciências e geografia.
- Lidar com conversões de unidades familiares, de maneira significativa.

OFICINAS

Nesta segunda parte, trazemos um forte aspecto da exploração de jogos com sucata, que é a exploração Matemática da confecção dos jogos. Para tanto, iniciamos com um capítulo sobre a Modelagem Matemática e os Jogos. Nele, discutimos elementos que fundamentam o uso da modelagem matemática como metodologia de ensino e aprendizagem da matemática e também como as oficinas de confecção dos jogos com uso de material de sucata e o conhecimento matemático mobilizado e explorado. Algumas oficinas podem ser encontradas com vídeos e apresentações no site lemate.net/CDS/ SJSEM. Trazemos nesse capítulo a oficina para gerar a malha do *Jogo dos Poligonos*. Outra possibilidade para a formação matemática é a idealização do jogo em si, com a reflexão sobre a aprendizagem do campo a ser explorado, a definição de suas regras, materiais e análise didática dos mesmos. Nesse sentido, trazemos um texto de fundamentação sobre a escrita numérica no sistema de numeração decimal, que conjuntamente com a análise didática que possibilitou a construção do Bingo dos Racionais (Capítulo VI) foi utilizado durante o curso para que os professores construíssem um bingo da escrita dos números.

Capítulo IX

Modelagem Matemática e os Jogos

Ross Alves do Nascimento Verônica Gitirana

Introdução

A Educação Matemática nos últimos anos vem discutindo o uso de metodologias de ensino que valorizam a articulação do conhecimento matemático com conhecimentos de diferentes contextos. Defendida nos documentos de orientações curriculares [23], [16], a Modelagem é uma dessas metodologias, que deriva de uma das naturezas da Matemática: a construção de modelos para representar e operar situações reais de diversos contextos. Muitos dos conhecimentos matemáticos são resultados da elaboração de um modelo para solucionar um problema, às vezes real, às vezes matemático, outras vezes de outras áreas do conhecimento científico. Um pouco diferente, a modelagem como metodologia de ensino busca ofertar um problema em uma situação contextualizada para propor ao aluno modelizar (caricaturar/descrever/ representar) a mesma, na busca de dar um sentido, por meio da linguagem matemática, e possibilitar a construção de uma solução para o problema. Ubiratan D'Ambrósio [31] destaca o processo de representações da realidade (modelagem) como um ciclo de aquisição de conhecimento que é deflagrado a partir da realidade, plena de fatos que informam ao indivíduo, destacando que

O indivíduo processa a informação e define motivações e estratégias para ação e essa ação vai modificar a realidade, estabelecendo assim um ciclo:... realidade ® indivíduo ® ação ® realidade

... A ação resulta de estratégias motivadas pela necessidade e/ou desejo que tem cada indivíduo de explicar, conhecer, entender, lidar, manejar, conviver com a realidade, e obviamente resulta da informação que o indivíduo dela recebeu.

A proposta da modelagem como metodologia de ensino é trabalhar a Matemática a partir da resolução de problemas reais para que o aluno analise a situação, busque em seu escopo de conhecimento matemático aqueles que poderiam ser utilizados para modelizar o problema a fim de, por meio da Matemática, encontrar uma solução. O uso da modelagem, nesse artificio, busca oferecer ao aluno situações para o desenvolvimento de uma competência matemática que é impossibilitada em um currículo fragmentado, currículo este em que cada atividade está inserida em um "tempo didático", no qual já estão definidos os campos de conhecimentos a se utilizar. Por exemplo, ao se estudar função quadrática, as atividades são para utilizar funções quadráticas. Não cabe ao aluno pensar se a situação pode ser modelizada por uma função quadrática. Um exemplo de situação de modelagem é a que se quer construir um tabuleiro para o Jogo da Velha com Figuras Geométricas. As figuras já foram obtidas e a maior delas é o círculo com 35 cm de diâmetro. Tem-se papelão para construir o tabuleiro. Precisa-se então construir o tabuleiro adequado às peças, de maneira que as mesmas caibam em cada quadrado do tabuleiro. Que conhecimentos matemáticos precisam ser usados para solucionar a situação de forma a obter um tabuleiro quadrado em que as casas sejam todas quadradas e formem quadrados congruentes?

Vários pesquisadores [31], [32], [33] indicam a necessidade da inclusão da modelagem no currículo escolar enfatizando os valores positivos dessa prática no ensino (habilidades, competências, aprendizagem). As propostas discutem o incentivo que essa técnica produz para recuperar o senso de necessidade do uso da Matemática no dia a dia, ajudando as pessoas a compreenderem o significado dos conhecimentos matemáticos na vida.

No campo da vivência com jogos matemáticos, há diversas possibilidades de uso dessa metodologia, das quais citamos algumas. Uma primeira em que podemos utilizar a modelagem é o mapeamento/descrição/etapas de conhecimento de um jogo buscando desvendar a Matemática que está por trás das estratégias do jogo. Uma segunda possibilidade é a elaboração do jogo em si, a modelação do jogo e a descrição das regras e etapas necessárias para utilizá-lo no ensino de Matemática. Por exemplo, se quisermos construir um Jogo dos Polígonos para trabalhar certas figuras geométricas pré-determinadas. quais figuras podem ser utilizadas e como obtê-las a partir da malha já dada? Que conhecimentos matemáticos serão necessários para tais definições? E os didáticos? Uma terceira possibilidade é aquela que trataremos nesse trabalho. a modelagem para a confecção do jogo com material de sucata. Partindo desse foco, o Projeto Rede: jogos na educação matemática (NEMAT/UFPE) busca trazer uma vivência da modelagem para que professores possam se apropriar e utilizar dos artificios da metodologia da modelagem, conhecendo a importância desse recurso para o ensino/aprendizagem de Matemática.

Importantes Aspectos Didáticos para o Uso da Modelagem na Sala de Aula

Uma abordagem que preze pela modelagem apresenta limites e possibilidades, aos quais o professor precisa estar atento. É claro que algumas condições de trabalho devem ser propiciadas para gerar discussões sobre o que é e para que serve a Matemática.

O ambiente de Modelagem está associado à problematização e investigação. Nesse sentido, é importante saber colocar o problema e buscar os requisitos de sua solução. Por exemplo, ao propor a confecção da *Mankala Colhe Três* [34] com sucata numa oficina é preciso discutir o jogo da Mankala e os limites e as necessidades de seu tabuleiro. No tabuleiro, as covas precisam ficar simetricamente (simetria de rotação) dispostas centralizadas no tabuleiro.

É importante, nesse sentido, mostrar situações: uma Mankala feita com os cuidados matemáticos necessários e uma em que as covas estão desordenadas. Sem o entendimento do problema, essa prática tornar-se algo dificil/vago e pode gerar como resultado apenas uma confecção sem reflexões matemáticas.



Figura 51: lado esquerdo, modelos de tabuleiros indesejados; lado direito, modelo desejado de tabuleiro

O aluno precisa entender ou mesmo ter oportunidade de descobrir que tipo de solução é desejado. A não explicitação pode levar o aluno a oferecer uma solução em que as covas são posicionadas sem grandes precisões. Ou mesmo, no caso do tabuleiro do *Jogo da Velha*, o não estabelecimento que as "casas" precisam ser quadradas pode levar o aluno a trazer uma solução em que as "casas" tenham lados de comprimentos diferentes, dificultando inclusive o uso do tabuleiro para jogar. É preciso propiciar situações em que o aluno desenvolva a capacidade de inventor, de pesquisador, de personagem que trabalhe em conjunto com seus pares.

Um segundo aspecto é que a exploração do conhecimento matemático parte da solução dada pelo aluno. O espaço da sala de aula torna-se uma oficina de modelagem, um ambiente gerador da aprendizagem. É preciso estar atento para não transformar a modelagem em uma aula expositiva de como resolver um problema. Muitas vezes, confunde-se uma abordagem de modelagem com aulas em que se parte de uma situação real para mostrar como fazer uma boa modelagem que dê conta de resolver o problema, com todas as etapas importantes da modelagem. Este encaminhamento retira do aluno a oportunidade de entender o problema e buscar, dentre os seus conhecimentos,

quais os que poderiam ser utilizados para construir um modelo matemático que dê conta de resolver a situação. Esta é uma capacidade essencial para se utilizar a Matemática fora da sala de aula em situações diversas.

Um terceiro aspecto refere-se ao trabalho em grupo. O trabalho com modelagem deve ser feito em grupos, a fim de melhor propiciar uma discussão sobre as questões matemáticas. Professores e alunos devem participar em conjunto e atuar sobre as discussões matemáticas advindas dessa atividade. No entanto, a fim de socializar o conhecimento que cada grupo construiu com toda a sala, as estratégias devem ser bem discutidas com toda a turma. Essa discussão pode gerar também um momento de aproximar as construções da Matemática dos alunos e o conhecimento matemático da ciência. Muitas vezes os termos utilizados pelo aluno precisam ser aproximados aos termos utilizados na Matemática. Outras vezes, os alunos utilizam intuitivamente conhecimentos durante a ação sem fazer perceber que se trata de conhecimentos matemáticos.

Um quarto aspecto diz respeito à preparação do professor para orientar a atividade com modelagem. Quando o aluno se defronta com a situação a resolver, ele terá diversas maneiras de abordar e, consequentemente, poderá trazer diversos tipos de conteúdos matemáticos. Há, então, o entrave do currículo escolar. É necessário que o professor desenvolva uma boa antecipação das possibilidades de solução por parte dos alunos a fim de melhor integrar a atividade de modelagem no currículo escolar, e de se preparar para auxiliar as diversas possibilidades que surgirão naturalmente.

Por exemplo, para traçar as figuras geométricas pré-determinadas do exemplo já mencionado do novo *Jogo dos Polígonos* [35], um aluno pode decidir trazer apenas triângulos de diversos tipos. Um problema então será buscar entender quais os tipos de triângulo que poderão utilizar com a malha: isósceles, equilátero e escaleno. Busca-se, portanto, entender se é possível traçar triângulos equilátero, isósceles e escaleno com o uso da malha quadrada. Já outro pode decidir traçar somente polígonos regulares e gerar o problema de definir quais e quantos poderão ser construídos. Diferentes conhecimentos estarão sendo tratados.

Um quinto aspecto, é a adequação da solução do problema aos conhecimentos que são passíveis de serem mobilizados pelos alunos do ano que se trabalha. Nessa antecipação, assim como na colocação das condições do problema, é importante considerar o conhecimento que os alunos já detêm. Por exemplo, no *Jogo da Velha com Figuras Geométricas*, não adianta pensar que os alunos dos anos iniciais do ensino fundamental poderão discutir a obtenção dos polígonos por construção com régua e compasso.

Exemplos de Situações com o *Jogo da Velha com Figuras Geométricas*

Iniciamos essa exemplificação discutindo as três possibilidades de modelagem que citamos com o *Jogo da Velha com Figuras Geométricas*. Primeiramente, partimos da vivência que o grupo teve no desenvolvimento do jogo.

O *Jogo da Velha com Figuras Geométricas* [36] é uma adaptação do jogo original da velha conjugado com os objetivos dos blocos lógicos [37]. A modelagem explorada no desenvolvimento dessa proposta (*Jogo da Velha* com formas geométricas) vai explorar os conceitos geométricos presentes nas peças dos Blocos Lógicos, reconhecimento de classes, agregados à lógica de preenchimento do *Jogo da Velha*. Esse desenvolvimento é uma confluência/conjugação dos conceitos presentes em ambos os materiais.

Tínhamos como problema desenvolver um jogo que conjugasse a classificação das figuras do Bloco Lógico, com outras características das peças e a formação de linhas do próprio *Jogo da Velha*. Um primeiro problema discutido foram as peças e sua classificação. No bloco lógico, tinha-se o retângulo e o quadrado. Na classificação dos quadriláteros, é mais comum incluir o quadrado como um tipo especial de retângulo, do que no uso que se fazia do Bloco lógico, no qual o quadrado não era considerado como retângulo. A manutenção dessas peças poderia fazer com que uma situação lúdica de jogo induzisse o aluno a achar que o quadrado não é um retângulo. A discussão então partiu para se

escolher quais as figuras que seriam trabalhadas. Outro problema matemático que teve que ser considerado foi a imbricação entre características de figuras tridimensionais e figuras bidimensionais próprias, que já é uma limitação discutida do Bloco Lógico. É comum, ao manipular o bloco lógico, se falar em triângulo grosso e triângulo fino. Nessa fala, atribui-se espessura a uma figura plana, o que gera uma confusão conceitual. Decidiu-se partir então para outros tipos de peças, sem variar a espessura. A discussão da elaboração do jogo passa a ser um grande momento de reflexão em torno de conhecimentos matemáticos.

A atividade de modelagem pode também ser proposta no sentido de construir um *Jogo da Velha* com outras figuras geométricas ou com figuras tridimensionais. Como gerar e quais as características que serão consideradas para se fazer pontos?

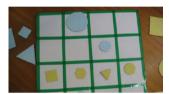


Figura 52: exemplo de jogada do jogo da velha com figuras geométricas

Outra linha do trabalho de modelagem é na elaboração de regras. O trabalho com modelagem de um jogo pode também ser feito a partir de uma tarefa de modificações de um jogo a partir de um problema surgido ou de uma necessidade em sala de aula. As discussões/formulações de novas regras passam por um processo de modelização. Por exemplo, no *Jogo da Velha com Figuras Geométricas*, percebem-se situações em que um jogador poderia marcar ponto, mas a peça necessária já foi utilizada, como na figura ao lado em que o jogador com peças amarelas tem a sua vez. A princípio poderia marcar pontos na diagonal colocando uma peça pequena, mas as mesmas já foram todas usadas.

Além disso, um jogador facilmente mapeia as peças do adversário. Pode-se lançar como situação de modificação do jogo para que o aluno tenha maiores possibilidades de fazer pontuações e maior dificuldade em mapear as peças do adversário

Já na confecção do jogo, os exploradores/modeladores deverão discutir o projeto final do mesmo, observando aparência, medidas, figuras, material, entre outros aspectos. Essa será uma discussão importante, pois o produto final, trabalhado com a ideia de aproveitamento de material (sucata), impõe que se estabeleça um controle de qualidade. Além disso, a estratégia adotada dependerá também do material de sucata conseguido pelos alunos. Vários conhecimentos da geometria como paralelismo, perpendicularidade, figuras geométricas serão discutidos durante o processo de construção. Algumas medidas de grandezas geométricas (comprimento, área, ângulo) também aparecerão, como, por exemplo, na discussão de como caracterizar as figuras grandes e as figuras pequenas: qual será a grandeza tomada? Um texto que estará disponível no site trará antecipações mais detalhadas desse trabalho da confecção do *Jogo da Velha com Figuras Geométricas* a partir de sucata.

Capítulo X

Oficina de Construção do Material com Modelagem Matemática

Iolanda Andrade

Confecção com Sucata

Como nosso objetivo é o de construir jogos com procedimentos accessíveis, que não exijam habilidades especiais e que, principalmente, demandem recursos materiais facilmente encontrados no cotidiano escolar, buscamos montar as malhas que vão servir de base para o jogo com dobradura, ou apenas com uma régua. Para isso vamos recorrer a dobradura de papel.

A Confecção da Malha

Tomemos uma folha de papel retangular (A4, Carta, Ofício, etc). Devemos confeccionar quatro malhas quadradas e, para isso, começamos por dividir a folha em duas partes iguais, por dobradura e corte (etapa 1). Em seguida, em cada uma dessas meias folhas, procedemos a nova dobradura na metade, mas não efetuamos o corte, riscando com um lápis o vinco formado (etapa 2). Agora é preciso fazer uma dobradura em cada metade das meias folhas para delimitar duas regiões quadradas, eliminando-se o que sobrou do papel. Efetuado tudo isso, ficaremos com quatro pedaços quadrados, e fazemos os sucessivos vincos para formar as quatro malhas quadradas.

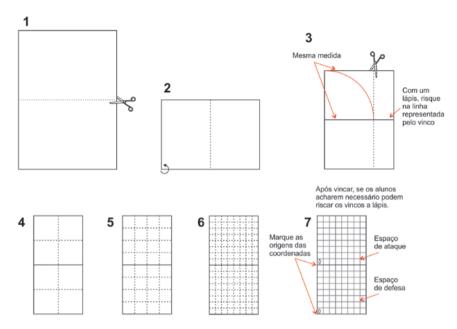


Figura 53: Diagrama de uma malha quadrada a partir de uma folha de papel oficio

Caso não tenhamos papel branco, podemos utilizar uma folha de caderno e tomarmos as pautas como linhas verticais da malha. Devemos cuidar para que o espaçamento entre as linhas horizontais seja igual ao das linhas verticais, para garantir que a malha seja quadrada.

Outra forma é traçar com uma régua uma malha em papel branco, que pode ser reutilizado







Figura 54: Fotos do traçado da malha com uma régua e um papel retangular.

1. Com uma régua encostada à margem inferior do papel trace a primeira linha.

Obs.: Esta linha será paralela à base do papel devido à régua manter a mesma largura ao longo de seu comprimento;

- 2. Para fazer as demais linhas encoste a régua na linha anterior;
- 3. Faça o mesmo procedimento para as linhas verticais; **Obs.:** as linhas verticais e horizontais traçadas serão perpendiculares entre si, pois o papel tem suas margens inferior e lateral perpendiculares.
- 4. Selecione as linhas que servirão de eixo e enumere as linhas, na horizontal e na vertical.

O procedimento pode ser visto no vídeo de confecção (lematec.net/CDS/SJSEM).

Capítulo XI

A Apropriação da Escrita Numérica no Sistema de Numeração Decimal

Rosinalda Aurora de Melo Teles Paula Moreira Baltar Bellemain Verônica Gitirana

Introdução

Os números desempenham diferentes papéis na prática social. Podem quantificar, medir, ordenar ou apenas identificar ou rotular algo. Historicamente, a necessidade de controlar quantidades fez surgir os primeiros registros escritos e a escrita numérica antecedeu a escrita de palavras. O processo de construção do conceito de número envolve simultaneamente a identificação dos seus usos sociais, a compreensão da ideia de número e a apropriação do sistema de escrita numérica.

A pesquisadora Constance Kamii [2] referindo-se à teoria de Jean Piaget, chama a atenção para a existência de três tipos diferentes de conhecimento: o físico, o lógico-matemático e o social. O conhecimento físico diz respeito à realidade externa dos objetos, como a cor, o tamanho, o "peso". O conhecimento lógico-matemático é aquele obtido por relação mental, por exemplo, diferenciação das cores, dos comprimentos e dos "pesos" de dois ou mais objetos. Finalmente, o conhecimento social é adquirido por transmissão social, como o nome das cores, da designação de comprimentos (grande, médio e pequeno) e de "pesos" (leve e pesado).

A ideia de número natural é um conhecimento de natureza lógico matemática, pois é fruto de um processo de abstração reflexiva sobre as quantidades. Para

dar sentido à ideia abstrata de "quatro", a criança precisa entender que há uma propriedade comum a uma coleção de quatro carrinhos e outra de quatro bonecas; que a quantidade não se altera quando eu organizo os objetos de maneiras diferentes; que três bolinhas de gude estão contidas em uma coleção de quatro bolinhas de gude; que se eu tenho quatro carrinhos e uma bola, possuo mais brinquedos do que carrinhos etc. Por outro lado, os nomes dos números (um, dois, três, cinquenta, trezentos, etc.) e os símbolos usados para representá-los (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, no nosso sistema de numeração) são conhecimentos de natureza social. Em outras línguas, os nomes são diferentes (por exemplo, un, deux, trois, cinquante, trois cents em francês) e em outros sistemas de numeração, os símbolos utilizados também são diferentes (os símbolos I, V, D, L, C, M, no sistema de numeração romano, por exemplo). As regras que regem a escrita numérica também variam. Por exemplo, no sistema de numeração romano, a escrita XII representa o número 12. O símbolo X representa 10, independentemente da posição que ocupa na escrita; somam-se os valores de cada símbolo (dez mais um, mais um). Já no nosso sistema de numeração a escrita 120 é gerada segundo outras características: o símbolo 1 representa cem, o símbolo 2 representa vinte, o zero cumpre a função de mantenedor de posição, e assim por diante.

Diferentes civilizações desenvolveram sistemas de numeração próprios, com características distintas. A discussão das características de sistemas como o dos Egípcios, Babilônios, Maias ou outros foge do escopo desse texto. O leitor poderá se remeter ao paradidático desenvolvido por Luiz Márcio Imenes [38] sobre esse tema.

Para atribuir sentido à escrita numérica, a criança vai precisar articular conhecimentos de natureza lógico matemática (por abstração reflexiva das propriedades que regem o sistema) com conhecimentos de natureza social (por comunicação de convenções).

Neste texto, vamos nos concentrar na apropriação do sistema de numeração hindu-arábico, ou Sistema Numérico Decimal (SND) por crianças do 1º

ciclo do Ensino Fundamental. Refletimos sobre dificuldades que as crianças enfrentam e hipóteses que formulam em relação ao SND; a relação entre agrupamentos, escrita numérica, comparação e produção de números.

O Sistema de Numeração Decimal

O sistema de numeração que utilizamos é o hindu-arábico ou sistema de numeração decimal – SND. Criado pelos hindus e divulgado pelos árabes, como discutido por João Bosco Pitombeira e Verônica Gitirana [39], este sistema se distingue dos demais pelo fato de a posição que um símbolo ocupa determinar o valor assumido por ele.

Um mesmo algarismo pode representar diferentes números. O algarismo 2 pode representar duas unidades (como no número 12), duas dezenas (como no número 126), duas centenas (no número 3267), e assim por diante, em função da posição que o algarismo ocupa.

O algarismo 2 não representa necessariamente a quantidade dois e, portanto, a aprendizagem do sistema numérico pela criança exige que ela se aproprie dessa característica do sistema. O domínio pleno da leitura e escrita numérica depende, entre outros fatores, de entender que a identificação da quantidade representada se baseia tanto no símbolo como na posição que ele ocupa. Nesse sentido, a memorização simples do símbolo não é suficiente para ler, interpretar e representar quantidades. Por muitas vezes, pode ser uma novidade para uma criança observar que 31 e 13 são formados pelos mesmos algarismos, mas não são os mesmos números

Além disso, o sistema de numeração decimal organiza a escrita por agrupamentos de 10, ou seja, é um sistema de base 10. As três primeiras posições ou ordens são denominadas: unidade, dezena e centena. Elas recebem denominação e valor próprios: Unidade $-1=10^{\circ}$, Dezena $-10=10^{\circ}$ e Centena $-100=10^{\circ}$.



Figura 55: Ordens e agrupamentos do SND

Cada "nova" ordem é formada pelo agrupamento de 10 da ordem anterior. Assim, uma dezena é formada por 10 unidades, uma centena é formada por 10 dezenas.

Muitas vezes, costumamos ouvir que o sistema de numeração decimal é de base 10 por ter apenas 10 algarismos para representar qualquer número. O mais apropriado é afirmar que esse sistema tem 10 símbolos porque é posicional e tem base 10. Ou seja, o fato de possuir 10 símbolos é consequência e não causa das características do sistema. Por ser posicional e por trabalhar com agrupamentos de 10 em 10, precisam-se apenas dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 para representar qualquer valor que se tenha em cada ordem. Ao chegar a 10, agrupa-se em um da ordem superior.

O sistema é de base 10, mas também é de base 1000. Após a quarta ordem, os números passam a ser reagrupados em classes. Cada 3 ordens formam uma classe. A primeira classe é a das unidades, a segunda a da milhar, a terceira a do milhão, a quarta a do bilhão, etc. Observa-se que a cada classe, as ordens são as mesmas: a unidade, a dezena e a centena. Todas com o mesmo valor, 1, 10 e 100, só que tem o fator multiplicativo da classe. A dezena de Milhar vale 10 x 1000, a Centena de Milhão valerá 100 x 1000².

Classe	Milhar (1000)			U	nidades (1	1)
Ordem	Centena	Dezena	Unidade	Centena	Dezena	Unidade
Valor da ordem	100 x 1000	10 x 1000	1 x 1000	100	10	1

Figura 56: Classes e ordens com valores

O valor representado por cada algarismo em uma ordem, denominado de valor relativo, tem um caráter multiplicativo. O valor representado pelo algarismo quando na unidade é denominado também de valor absoluto.

Milhar (1000)		Unidades (1)			
Centena	Dezena	Unidade	Centena	Dezena	Unidade
	3	4	5	7	1

Figura 57: Quadro valor de lugar representando 34571

- 5 vale 5 x 100 ou 5 x 10²;
- ▶ 7 vale 7 x 10 ou 7 x 10¹;
- ▶ 3 vale 3 x 10 x 1000 ou 3 x 10.000 ou 3 x 10⁴.

Na numeração escrita, a adição e a multiplicação são utilizadas sempre da mesma maneira:

- multiplica-se cada algarismo pela potência da base que corresponde à ordem depois pela potência de 1000 que corresponde à classe;
- adicionam-se os produtos que resultaram dessas multiplicações.

Assim o número acima vale:

$$34.571 = (3 \times 10 + 4) \times 1000 + (5 \times 100 + 7 \times 10 + 1) \times 1000^{0} =$$

$$= 3 \times 10 \times 1000 + 4 \times 1000 + 5 \times 100 + 7 \times 10 + 1 =$$

$$= 3 \times 10^{4} + 4 \times 10^{3} + 5 \times 10^{2} + 7 \times 10^{1} + 1 \times 10^{0}$$

O exemplo anterior ilustra porque podemos afirmar que o sistema é aditivo e multiplicativo ao mesmo tempo.

Neste tipo de sistema, posicional e que trabalha por agrupamentos, para representar alguns números surge o problema de haver ordens (posições) em que não há agrupamentos que não possam ser reagrupados em ordens posteriores, como no caso do número 501. Há 50 agrupamentos de dezenas. No entanto, 50 dezenas podem ser reagrupadas em 5 centenas.

Unidades (1)				
Centena Dezena Unidade				
5	0	1		

Figura 58: representação do 501

Fica então uma posição da escrita sem agrupamentos. Diante desse tipo de problema, surgiu o zero, como delimitador de posição. O delimitador de posição surgiu antes do sistema hindu-arábico, com os babilônios, porém ele adquire status de número, podendo ser operável, no sistema hindu-arábico.

$$501 = 5 \times 100 + 0 \times 10 + 1 \times 1$$

Em síntese, o nosso sistema de numeração decimal é caracterizado por ser:

- Um sistema posicional, uma vez que um mesmo símbolo representa valores diferentes dependendo da posição que ocupa no número;
- De base 10; pois cada nova posição (ordem) representa um grupo de 10 elementos da ordem anterior;
- É multiplicativo, visto que o valor relativo representado por cada algarismo é formado apenas pelo valor absoluto multiplicado pelo valor da ordem ocupada;
- É aditivo porque se obtém o valor representado pelo numeral pela soma dos valores relativos (ou posicionais) de cada algarismo;
- Tem no zero a função de guardar posição vazia no número;

 Após o milhar, é também de base 1000, organiza-se em classes, e estendendo-se o caráter multiplicativo. O valor relativo, representado por cada algarismo, é formado pelo valor absoluto multiplicado pelo valor da ordem e pelo valor da classe ocupados.

Compreensão da Escrita Numérica

Terezinha Nunes Carraher [40] chama a atenção que, a partir do momento em que as pessoas têm uma experiência com todos os aspectos básicos de um sistema, elas são capazes de organizá-los em um esquema lógico e construir sua representação correta. Muitos pesquisadores vêm estudando o processo de apropriação das escritas numéricas. Para o uso adequado do sistema é necessária à compreensão destes princípios.

Isto não significa, no entanto, que a criança aprenda a escrita numérica por meio da apreensão dessas regras. O conhecimento do número nos primeiros anos é social, depende das experiências que a criança tem com o número. A escrita numérica faz parte do dia a dia e começa a ser percebida pela criança muito cedo.

Desde cedo as crianças constroem hipóteses para escrever e ler números; seja fazendo uso da quantidade e da posição dos algarismos para comparar números; seja se apoiando na vivência anterior com números para escrever outros números; seja se baseando na numeração falada para elaborar considerações a respeito da numeração escrita. Délia Lerner e Patrícia Sadovsky [41], em seu estudo com duplas de crianças de cinco a oito anos, com questionamentos e atividades de comparação e produção de números, concluíram que estabelecer regularidades no sistema de numeração é uma condição necessária para compreender as regras do sistema e, que, neste processo, as crianças criam estratégias que estão diretamente ligadas à convivência com este sistema.

A apreensão do sistema de numeração decimal pela criança não se dá por meio de um ensino estruturado de regras. Terezinha Carraher e Ana Lúcia Schlieman (apud Higino, 1990) [42] observaram que desde cedo as crianças

compreendem a noção de valor relativo e que as crianças são capazes de compor quantidades, combinando fichas de valores diferentes. Constataram também que crianças pequenas eram capazes de compor quantidades mesmo sem nunca terem recebido instruções sobre o sistema de numeração. Elas realizaram o estudo com crianças de séries iniciais com a finalidade de investigar a compreensão delas sobre a escrita numérica, utilizando um material estruturado que chamaram de dinheiro chinês. Desenvolvido pelo grupo para promover a compreensão de alguns dos princípios do nosso sistema de numeração, esse material consiste em um sistema monetário de brinquedo com fichas coloridas, representando valores diferentes. Elas perceberam, porém, ser esse um conhecimento que dependia do material, pois essas crianças, ao lidarem com um sistema monetário, não foram capazes de escrever corretamente os números usando convenções de valor de lugar do sistema hindu-arábico.

É necessário que a criança tenha, dentro do espaço escolar, oportunidades constantes e variadas de comparar, escrever e ler números, isto é, refletir sobre as regularidades do sistema.

Leitura e Escrita dos Números

O conhecimento social, utilizado pela criança para construir a compreensão do sistema de numeração decimal, envolve tanto a escrita do número como a leitura. Essa relação precisa ser entendida para compreendermos algumas hipóteses e construções da criança. É comum, por exemplo, ouvirmos uma criança contar:

Vinte, vinte e um, vinte e dois, vinte e três, vinte e quatro, vinte e cinco, vinte e seis, vinte e sete, vinte e oito, vinte e nove, vinte e dez.

Nesse caso, há uma compreensão aditiva clara da formação do número, mas não do reagrupamento de 10.

Vamos tomar essa discussão por meio da explicitação da leitura dos números. Iniciaremos do um, pois nenhuma criança começa aprendendo o zero como valor absoluto. A discussão do zero surgirá como delimitador de posição vazia.

Escrita	Leitura
1	Um
2	Dois
3	Três
4	Quatro
5	Cinco
6	Seis
7	Sete
8	Oito
9	Nove

Quadro 4: Leitura e escrita dos números de 1 a 9

Assim como no sistema escrito, na leitura os 9 primeiros números ganham uma representação própria (assim como o zero também), um nome.

Ao chegar a uma ordem superior, as dezenas ganham-se também nomes diferentes, o dez, o vinte, E a cada agrupamento de dez um novo nome surge:

Escrita	Leitura
10	Dez
20	Vinte
30	Trinta
40	Quarenta
50	Cinquenta
60	Sessenta
70	Setenta
80	Oitenta
90	Noventa

Ouadro 5: Leitura e escrita das dezenas

Diferentemente do sistema escrito, as dezenas ganham novos representantes, novos nomes. No entanto, a partir do 30, os nomes são derivados dos nomes das unidades. O aspecto multiplicativo é explicitado por tal derivação da palavra, quatro – quarenta, cinco – cinquenta,...

Ao chegar à nova ordem, a centena, novos nomes surgem: cem (ou cento), duzentos (dois centos), trezentos (três centos),... o aspecto multiplicativo também é explicitado na formação da palavra.

Entre o 10 e o 20, novos nomes aparecem para os números.

Escrita	Leitura
10	Dez
20	Vinte
30	Trinta
40	Quarenta
50	Cinquenta
60	Sessenta
70	Setenta
80	Oitenta
90	Noventa

Quadro 6: Leitura e escrita das dezenas

Os números entre 11 e o 15 têm uma mesma terminação "ze". De 16 a 19, a composição aditiva é clara na formação da palavra: dez e sete – dezessete. Muitas vezes, observam-se crianças que contam dez e um, dez e dois, ... criando sua lógica própria e atribuindo aos números de 10 a 20 a mesma lógica dos assumidos de 20 a 99: chama-se o nome da dezena e o nome da unidade, 34 - trinta e quatro, 93 – noventa e três.

Assim como a montagem do sistema, o conhecimento da lógica do 20 ao 30, e o conhecimento dos nomes das dezenas exatas, é suficiente para se conseguir escrever de 20 a 99. Em relação ao acesso das crianças ao SND, estudos têm mostrado, por exemplo, que a ordem da leitura e da escrita pela criança não segue a ordem numérica. As crianças manipulam inicialmente a escrita dos "nós" (dezenas, centenas, mil....), elas não precisam aprender a contar de 21 a 30, depois de 31 a 40, ... para saber do 51 a 60, por exemplo.

Como destacam os pesquisadores Terezinha Nunes e Peter Bryant [3], alguns aspectos do sistema de numeração escritos requerem compreensão dos mesmos princípios do sistema oral, mas outros aspectos – como o valor posicional e o uso do zero como mantenedor de lugar – são específicos do sistema escrito.

O valor da ordem dezena é dado por novas palavras ou derivação da unidade, da centena pela formação de novas palavras com o nome da unidade e a palavra cento. Em relação à ordem da unidade, ora a posição é explicitada ora é apenas omitida, por exemplo, o número 356 pode ser lido como trezentos e cinquenta e seis ou trezentos e cinquenta e seis unidades.

A composição aditiva é explicitada em geral pelo uso do conectivo "e", mas entre 11 a 15 assume aspecto de derivação da palavra, e de 16 a 19, uma formação de uma única palavra com o nome da dezena e o nome da unidade.

O valor posicional para números com mais de uma classe, assume a explicitação pelo nome da classe, no caso:

$$63.785 = (6 \times 10 + 3 \times 1) \times 1000 + (7 \times 100 + 8 \times 10 + 5 \times 1) \times 1$$

Sessenta e três mil, setecentos e oitenta e cinco (unidades)

O aspecto aditivo entre as classes é denotado pela vírgula ou pelo conectivo "e".

Além disso, uma simples mudança na ordem de enunciação das palavras indica que foi mudada a operação aritmética envolvida:

- "cinco mil" designa 5000 = 5 x 1000; enquanto "mil e cinco" indica 1005 = 1000 + 5.
- "seiscentos" (seis centos) corresponde a 600 = 6 x 100, porém, "cento e seis" representa 106, que é 100 + 6.

Já a numeração escrita é mais regular, mais hermética: a soma e a multiplicação são utilizadas sempre da mesma maneira:

- multiplica-se cada algarismo pelo valor da ordem e pelo valor da classe (ou pela potência de 10 que vale a combinação da ordem com a classe),
- adicionam-se os produtos que resultaram dessas multiplicações.

O sistema de numeração decimal como escrito e como lido seguem lógicas similares, mas que não são iguais. Como apontado por Terezinha Nunes e Peter Bryant, o zero é outro elemento que diferencia a leitura da escrita.

Você já viu alguém ler 304 como "trezentos, zero dezenas e quatro"?

O zero como delimitador de posição vazia é de fato omitido na leitura de todos os números naturais, a menos do próprio 0.

304 – trezentos e quatro; 3004 – três mil e quatro.

Dado que a posição é explicitada pelo nome da ordem, ou a formação da palavra, a leitura pode omitir o zero como marcador de posição vazia. Se, por um lado, isto é um simplificador da leitura, por outro gera diversas dificuldades na aprendizagem da criança.

Leitura e Escrita do Número pela Criança

As diferenças entre os sistemas provocam também erros no processo da escrita pela criança, mas que têm por traz um entendimento da lógica da escrita ou da leitura. Neste texto, basearemos a discussão de alguns desses erros no estudo de Zélia Higino [42] sobre a escrita numérica das crianças. E numa reaplicação desses estudos feita 20 anos depois por Geogina Marafante de Sá, orientada por Rosinalda Teles [43].

Zélia Higino, há mais de 20 anos, buscou analisar os erros das crianças na escrita numérica. Demonstrou que existe um esquema lógico orientando os registros e que, muitas vezes, esse esquema indica claramente sua compreensão lógica subjacente aos sistemas de numeração: escrito e falado. Ao perceber as diferenças entre uma escrita de palavras e uma escrita numérica, a criança começa a construir hipóteses sobre os princípios que determinam o funcionamento de cada uma delas.

A autora realizou seus estudos com base em dados que colheu na avaliação de crianças da rede estadual de ensino de nível equivalente aos atuais 2°, 3°, 4° e 5° anos, nos anos de 1986, 1987 e 1988.

Mais recentemente, em 2008, na vigência de uma monitoria na disciplina Metodologia do Ensino da Matemática 1, Georgina Marafante de Sá, aluna do Curso de Pedagogia da UFPE, realizou, sob a orientação da professora Rosinalda Teles, uma pesquisa comparativa que consistiu na análise de dados coletados em 38 protocolos de crianças entre 5 e 7 anos, entrevistadas por alunos da graduação de Pedagogia da UFPE.

Ambas as pesquisas pautaram-se no ditado de números. Embora não tenham utilizado exatamente os mesmo números, a escolha foi guiada pelas mesmas ideias. No caso da pesquisa de Georgina Sá e Rosinalda Teles, os números ditados foram: 57 - 105 - 805 - 850 - 1005 - 1050 - 1738 - 6345 - 10500 - 51000. Estes números foram escolhidos visando analisar alguns aspectos relacionados à compreensão do SND.

A inclusão do número 57 pautou-se pela observação de que a criança quando ensinada os números pela sequencia deles de 1 a 100 tende a memorizar os números até 99, mesmo se não entenda os princípios que regem o SND, como, por exemplo, o princípio aditivo. Uma criança pode ser capaz de reproduzir a escrita 57 para representar cinquenta e sete, sem entender que o cinco representa cinquenta, o valor depende da posição, adicionam-se os valores relativos de cada algarismo, etc. Quando os números são maiores que 100, dificilmente a escrita baseia-se unicamente na memorização. Aí a criança expressa as suas hipóteses sobre a escrita numérica, as quais vão respeitar ou não os princípios do SND.

A análise da escrita das crianças mostrou que, como previsto, a imensa maioria delas é capaz de escrever corretamente 57.

57

Figura 59: Exemplo de registro correto do 57

Essa escrita pode denotar compreensão das características do SND, mas pode ser também fruto da memorização.

Outra escrita para o número 57, produzida pelos sujeitos foi:

507

Figura 60: Exemplo de registro utilizando o princípio aditivo se composição aditiva

Nesta escrita, identifica-se a influência da fala (cinquenta e sete), a familiaridade com o cinquenta (50) e a mobilização da decomposição aditiva (50 + 7). A criança escreve como se lê. Observa-se a dificuldade de composição aditiva na escrita numérica. Além disso, outras propriedades do SND que não são consideradas na escrita produzida por essa criança, como, por exemplo, o princípio posicional, a função do zero na escrita numérica ou o princípio multiplicativo.

Esse é um exemplo do que Zélia Higino destaca: existe um esquema lógico norteando os registros e, muitas vezes, esse esquema demonstra a compreensão de um ou mais princípios lógicos subjacentes aos sistemas de numeração. Para que haja uma compreensão robusta do sistema é necessário que a criança passe a lidar com os registros que ilustram os aspectos regulares do sistema de representação, a fim de perceber qual esquema lógico possibilitará gerar todos os outros registros do nosso sistema.

A hipótese que algumas crianças acertariam a escrever 57 por um conhecimento social foi testada com números da ordem do milhar: 1738 e 6345. Esses números permitiriam também observar: se a criança ao escrevê-los, utiliza o agrupamento e o reagrupamento e se ela compreende que o sistema tem a base dez, os princípios aditivos e multiplicativos e o valor de lugar e as classes.

O protocolo a seguir mostra o caso de uma criança que tem o conhecimento social até o 99, mas nas ordens posteriores não domina a composição aditiva. Ela consegue escrever 38 e 45 como algo aprendido por memorização, mas, no mil e setecentos e o seis mil e trezentos, a decomposição aditiva é explicitada, ela não compreende o princípio da composição aditiva da escrita numérica.

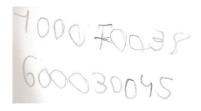


Figura 61: Protocolo de criança com conhecimentos mistos

Apesar de não adotar a composição aditiva na ordem da centena e da unidade de milhar, ela apresenta a composição multiplicativa clara. Outros que não o fizessem, denotariam seis mil por 61000, trezentos por 3100, etc.

Os números 105, 1005 e 1050, foram escolhidos para testar o zero como mantenedor de posição. Por exemplo, quando solicitadas a escrever os números, uma das crianças trouxe como respostas registros bem interessantes: 105, 105 e 150. Ela demonstra uma clara dificuldade em utilizar o zero como mantenedor de posição vazia. Consegue acertar para o 105, mas escreve o 1005 da mesma forma que o 105, e o 1050. Ela também não prevê a necessidade de delimitar a ordem da centena como vazia.

Outra observação feita é que algumas crianças conseguem escrever corretamente as dezenas e as centenas quando escritas isoladamente, e que registram decompondo as mesmas quantidades, quando estas aparecem na composição de números maiores. Enfim, os números 805, 850, 51000 foram incluídos para observar se os tipos de escritas que os alunos apresentam estão relacionados ao valor posicional, a decomposição dos números em partes, os princípios aditivo e multiplicativo e o zero como mantenedor de posição.

Vamos agora analisar algumas escritas do número 805. Houve crianças que conseguiam representar corretamente o número 805, e outras que não conseguiam. A expressão verbal (oitocentos e cinco) não se traduz facilmente na escrita numérica correspondente: 805. Para produzir essa escrita, uma das crianças precisou lidar, mesmo de maneira implícita, com as complexas características do SND como discutido anteriormente: o algarismo 8 corresponde a 800, e o algarismo 5 representa 5 unidades por causa das posições que ocupam; o símbolo 0 informa que além das 80 dezenas que compõem as 8 centenas, não há nenhuma dezena a mais; etc.



Figura 62: protocolo correto do ditado oitocentos e cinco

Lidar com todas essas regras não significa que a criança é capaz de explicar esses princípios. Esse conhecimento é fundamental para o professor, mas não se espera que seja ensinado às crianças. A ação da criança de escrever 805 quando ouve "oitocentos e cinco" traz implicitamente a mobilização das características do SND. Já outra criança escreve 8005, provavelmente apoiando-se na conexão entre o que ouve e sua escrita (800 e 5) sendo que o conectivo "e" remete ao princípio aditivo.



Figura 63: Registro de criança que explicita o princípio aditivo

Os dados das pesquisas mostram a imensa dificuldade que consiste para as crianças lidar com os princípios aditivo e multiplicativo nas escritas numéricas de números maiores do que 100. Há crianças inclusive que misturam símbolos. Por exemplo, vamos observar a escrita abaixo produzida por uma criança para os números 850.



Figura 64: Escrita com simbologia mista

Uma criança escreveu 805 como 8100e5e (que pode denotar que ela entende que o 8 multiplica o 100) e utiliza o conectivo "e" para o princípio aditivo mesmo na escrita numérica. A leitura que a criança faz do seu registro apontando cada um dos componentes do número que escreveu pode fornecer indícios da mobilização do princípio multiplicativo. No entanto, algumas crianças, ao fazerem esse tipo de registro, podem não estar usando o princípio multiplicativo, mas apenas buscando indícios na fala para representar as quantidades faladas.

As escritas dos números 10500 e 51000 revelaram casos em que a criança apresenta a capacidade de realizar a composição multiplicativa no interior de uma classe, mas não entre classes, com o valor da classe. Confirma-se mais uma vez a busca da criança em fazer corresponder os sons que ouve e a escrita que produz.

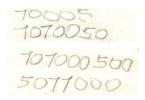


Figura 65: Registro dos ditados 10500 e 51000 por uma mesma criança

Ao denotar dez mil e quinhentos por 10 1000 500 e cinquenta e um mil por 50 1 1000 para cada palavra, a criança registra um número. O aspecto da composição aditiva do registro numérico não é respeitado, a criança busca explicitar no registro numérico a decomposição aditiva presente na leitura 10 1000 e 500; 50 e 1 1000. Já a composição multiplicativa é respeitada na classe das unidades, mas não aparece entre classes. Ao fazer 10 1000, a criança não compõe o número de forma multiplicativa, mas no 500 compõe o 5 x 100. O

mesmo ocorre ao fazer o 501 1000, o caráter multiplicativo com a classe é explícito.

Considerações Finais

O sistema de numeração decimal traz em sua constituição regras próprias que o fizeram sobressair durante a evolução da sociedade. No entanto, o uso social e humano do número e o conhecimento gerado por tal uso, permite que uma criança inicie seu aprendizado sem conhecimento lógico matemático desse sistema

Ao professor cabe acompanhar esse desenvolvimento, entender as hipóteses que as crianças geram ao se deparar com números mais complexos no aprendizado, e oferecer situações que possibilitem as crianças mobilizar os conhecimentos e aspectos estruturantes dos sistemas de numeração decimal. Os resultados obtidos tanto por Zélia Higino como por Georgina Sá e Rosinalda Teles mostram que a maneira de registrar os números passa pela construção de hipóteses sobre os princípios básicos que determinam o funcionamento do sistema de numeração decimal. O ensino baseado na comunicação direta de convenções e na memorização não dá conta desse processo. Se há conhecimentos sobre o sistema de numeração que só podem ser transmitidos culturalmente, há também outros que podem ser observados e generalizados. Não é necessário que alguém ensine diretamente a escrever 124, se a criança compreendeu as regras que regem o sistema de numeração (mesmo que ela não seja capaz de explicitar essas regras).

Mesmo nas escritas com erros, há indícios de uso de alguns princípios do SND. O jogo entre oralidade e escrita é importante, pois a conversão entre a linguagem verbal e a escrita numérica e vice versa, ora dá um apoio mútuo, ora apresenta divergências. Por isso, é importante a variedade de atividades que lidam com leitura e produção de escritas numéricas, nas quais a criança tenha

a oportunidade de expressar suas hipóteses e confrontar com outras hipóteses possíveis. Interpretar escritas numéricas presentes nas práticas sociais é uma fonte imprescindível, mas é preciso também gerar situações desafiadoras nas quais os alunos sejam confrontados aos aspectos delicados do sistema como é o caso do uso do zero como mantenedor de posição.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ZASLAVSKY, C. **Mais jogos e atividades matemáticas do mundo inteiro**. Porto Alegre: Artmed Editora S/A, 2009.164p.
- [2] KAMII, Constance. **A criança e o numero:** Implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação junto a escolares de 4 a 6 anos. 23. ed. Campinas (sp): Papirus, 1997. 124 p.
- [3] NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. **Crianças fazendo matemática.** 1. ed. Porto alegre: Artmed Editora S.A., 1997. 244 p.
- [4] PANIZZA, Mabel (org). Ensinar Matemática na educação infantil e nas séries iniciais. Porto Alegre: Artmed, 2006. 188 p.
- [5] VERGNAUD, G. El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. 1ed. México: Trillas, 1991
- [6] CROWLEY, M.L. O Modelo Van Hiele de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico. In: LINDQUIST, Mary M. e SHULTE, Albert P. (orgs.). **Aprendendo e Ensinando Geometria**. São Paulo: Atual, 1994.
- [7] NASSER, Lilian; SANT'ANNA, N.P. (orgs.). **Geometria segundo a teoria de van Hiele**. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, Projeto Fundão: 2004.
- [8] BOUTON, C. L.. Nim, A Game with A Complete Mathematical Theory, **Annals of Mathematics**, Princeton (2), 1902, 35-39.
- [9] SANTOS, Esmeralda Marques dos **Números Inteiros: uma proposta didática.** Trabalho de conclusão de Curso da Licenciatura em Matemática da UFPE, Recife, DMAT-UFPE, 2002.
- [10] BACHELARD, Gaston. **Formação do Espírito Científico**: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. São Paulo, Editora Contraponto, 1996.
- [11] BROUSSEAU, Guy. **Theory of Didactical Situations**. London, Spring-Verlag, 1997.
- [12] BORBA, Rute. The effect of number meanings, conceptual invariants and symbolic representations on children's reasoning about directed numbers. Tese de Doutorado, Oxford Brookes University, 2002.

- [13] NETO, Fernando Raul. Menos vezes menos dá mais: observações históricas sobre o conceito de número negativo. **EM TEIA** Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, Recife Brasil, 2, jun. 2011. Disponível em: http://www.emteia.gente.eti.br/index.php/emteia/article/view/30/18. Acesso em: 01 Out. 2011.
- [14] NASCIMENTO, Ross. Explorando A Reta Numérica Para Identificar Obstáculos Em Adição E Subtração De Números Inteiros Relativos. **Anais do VIII ENEM** Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, 2004, pp.1-6.
- [15] DUVAL, Raymond. Registros de representação semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. IN: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara. (Org.) **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica.** São Paulo: EDUC, 2005.
- [16] BRASIL, Ministério da Educação/Secretaria da Educação **Básica**. **Parâmetros Curriculares Nacionais de 5^a a 8^a série**: Matemática. Brasília: SEB, 1998.
- [17] SILVA, V.; SILVA, O.; BORBA, Rute Uma experiência de ensino de fração articulada ao decimal e à porcentagem. **Educação Matemática em Revista**, nº 8, ano 7, junho de 2000.
- [18] dos SANTOS, L. S. . Análise dos efeitos didáticos emergentes de uma sequência de atividades na aprendizagem do significado parte/todo do número racional. Dissertação de Mestrado em Ensino das Ciências. Recife: UFRPE, 2010.
- [19] BROUSSEAU, Guy. Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas: conteúdo e método de ensino. São Paulo: Ática, 2008.
- [20] PONCE, H.. Ensenãr y aprender matemática: Propuestas para el segundo ciclo. Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas, 2006.
- [21] LIMA, Maurício Figueiredo. Iniciação ao conceito de fração e o desenvolvimento da conservação de quantidade In: Terezinha Nunes Carraher (org.) **Aprender Pensando.** Petrópolis: Editora Vozes. 1986.
- [22] BORBA, Rute. **O que pode influenciar a compreensão de conceitos: o caso dos números relativos. I**n Borba, R. e Guimarães, G. *A pesquisa em Educação Matemática: repercussões na sala de aula*, São Paulo: Cortez, 2009.

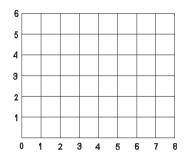
- [23] BRASIL. MEC/SEF. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Matemática. Brasília: 1997.
- [24] BRASIL, MEC/SEB. **Guia de livros didáticos 5a à 8a série** PNLD 2008. Brasília, 2007
- [25] BRASIL, MEC/SEB. **Guia de livros didáticos 1a à 4a série** PNLD 2010. Brasília, 2009.
- [26] BRASIL, MEC/SEB. **Guia de livros didáticos 5a à 8a série** PNLD 2011. Brasília, 2010.
- [27] PERNAMBUCO. Secretaria de Educação Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco: matemática / Secretaria de Educação. Recife: SE. 2008.
- [28] NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATHICS (NCTM), **Principles and Standards for School Mathematics.** Reston, VA, USA, 2000.
- [29] LIMA, Paulo Figueiredo; BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar. Habilidades Matemáticas relacionadas com grandezas e medidas. In: **Letramento no Brasil: habilidades Matemáticas:** Reflexões a partir do INAF 2002, Fonseca, M. C. F. R.Global Editora, São Paulo, 2004.
- [30] LIMA, Paulo Figueiredo; BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar. *Grandezas e medidas*. In: Brasil, MEC/SEB. **Col. Explorando o Ensino, V. 17, Matemática**: Ensino Fundamental. Coord. Carvalho, J. B. P. F. Brasília, 2010.
- [31] D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Da Realidade à Ação**. Reflexões sobre Educação (e) Matemática. São Paulo: Summus Editorial, 1998.
- [32] BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? **Veritati**, n. 4, p. 73-80, 2004.
- [33] BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. Modelagem matemática no ensino. São Paulo: Contexto, 2000.
- [34] ANDRADE, Juliana; LEAL, Yara; MONTEIRO, Andréa; ANDRÉ, Regina; MACLYNE, Diógenes; TELES, Rosinalda; GITIRANA, Verônica. *Mankala colhe três*. Disponível em http://lematec.net/projetorede/index.php?page=mankala-colhe-tres, 2011, acessado em 19 de julho de 2011.

- [35] LEITE, Bruno: GONÇALVES, Dierson; LANDIM, Evanilson.; CARVALHO, Ivanildo; ALMEIDA, Iolanda A. C.; BELLEMAIN, Franck.; OLIVEIRA BARROS, Lilian D. **Jogo dos Polígonos**. Texto disponível em http://lematec.net/projetorede/index.php?page=jogo-dos-poligonos, 2011, acessado em 21 de julho de 2011
- [36] MEDEIROS, I.; BARROS, Alexandre; FONSECA, Claudio; GITIRANA, Verônica. *Jogo da Velha com Figuras Geométricas*. Texto disponível em http://lematec.net/projetorede/index.php?page=jogo-da-velha, 2011, acessado em 19 de julho de 2011.
- [37] DIENES, Z. P. **Lógica e Jogos Lógicos**. 2.ed. rev. São Paulo: EPU; Brasília: INL, 1974.
- [38] IMENES, Luiz Márcio. **Os números na história da civilização.** Coleção Vivendo a Matemática. São Paulo: Editora Scipione, 1989.
- [39] PITOMBEIRA, João Bosco e GITIRANA, Verônica. Matemática no Contexto ou o Contexto na Matemática. In João Bosco Pitombeira (Orgs.) **Explorando o Ensino** Matemática, Brasilia, MEC, 2011.
- [40] CARRAHER, Terezinha Nunes. **Na vida dez na escola zero.** São Paulo, Editora Cortez, 1988.
- [41] LERNER, Délia e SADOVSKY, Patrícia. O sistema de numeração: um problema didático. In Cecília Parra e Irma Saiz (Orgs.). **Didática da Matemática** Reflexões Psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, p. 73-155, 1996.
- [42] HIGINO, Zélia. A criança e a escrita numérica. Brasília: **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**. p. 141 162. Mai / Ago, 1990.
- [43] SÁ, Georgina Marafante e TELES, Rosinalda Aurora de Melo. Sistema de Numeração Decimal: diálogo com pesquisas sobre como a criança se apropria da escrita numérica. **Anais do Encontro Sergipano de Educação Matemática**. Aracajú, Sergipe, 2008.



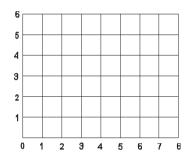
Malha do Jogo dos Polígonos

Malha dos Lances





Malhas dos seus polígonos

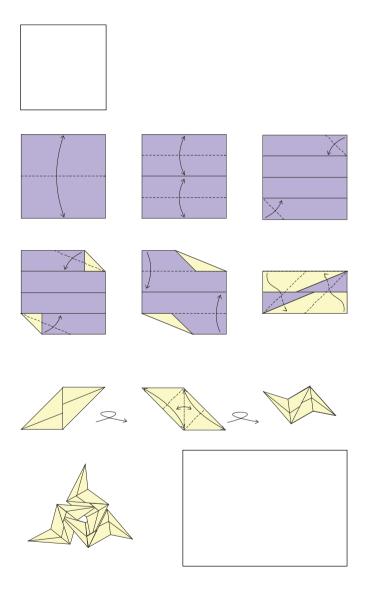




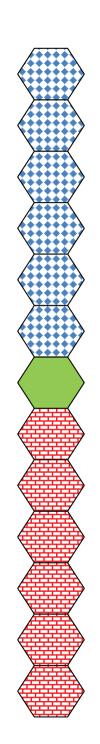
Instruções:

- Desenhar, no mínimo, dois polígonos com vértices nos pontos de encontro de duas linhas da malha (pontos com coordenadas cartesianas inteiras pontos de encontro de linhas da malha);
- Cada polígono deve ser separado dos outros polígonos, ou seja, dois polígonos quaisquer não podem ter nenhum ponto em comum , nem mesmo um de seus vértices;
- O total de vértices dos polígonos deve ser igual 12.
- Legenda:
- @ fora dos polígonos
- dentro de um polígono
- o em um dos lados de um polígono
- x no vértice de um polígono

Diagrama da montagem do Cubo por Dobradura



Jogo dos Sinais



Legenda: Y Azul:

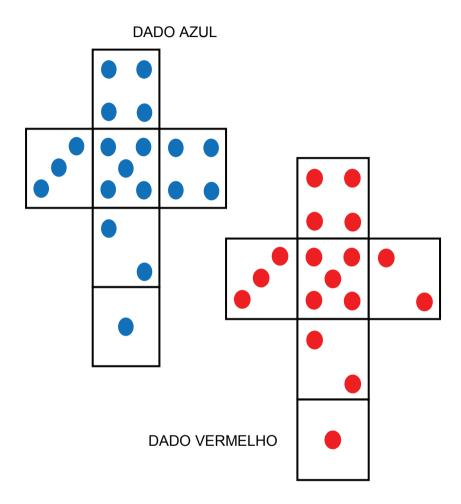
Verde:

Vermelho:



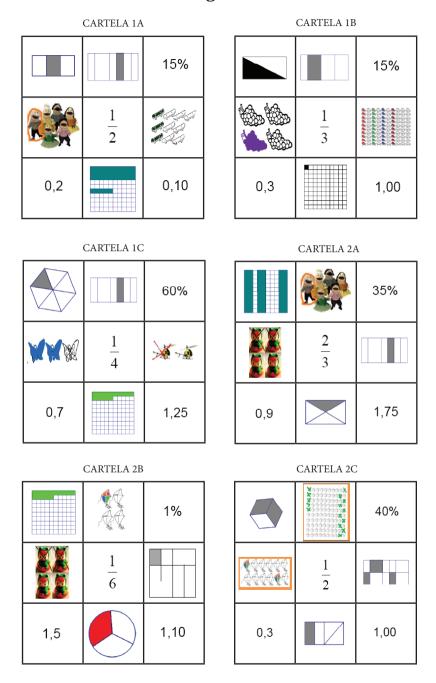


Planificações dos Dados



Observação: Para construir os dados use uma das técnicas apresentado no jogo do Nim Dados. Estas planificações são apenas para indicar a posição dos números, pois muitas vezes a impressão modifica a proporção distorcendo os quadrados. Isto é, as faces podem ser impressas como retângulos.

Modelos de Cartelas do Bingo dos Racionais

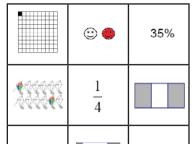


CARTELA 3A

1%

0.7 1.25

CARTELA 3B

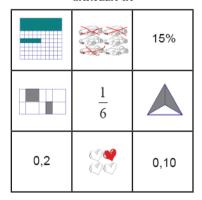


0,9 1,75

CARTELA 3C

1% 2 3 1,5 1,10

CARTELA 4A



CARTELA 42B

	000 000 000 000 000 000	60%
	$\frac{1}{2}$	
0,3		1,25

CARTELA 4C

	**	35%
	$\frac{1}{3}$	
0,3		1,75

CARTELA 5A

	1,10	*****
1,2	$\frac{1}{4}$	0,7
X	1%	

CARTELA 5B

	1,00	
2,10	$\frac{2}{3}$	0,9
	15%	

CARTELA 5C

	1,25	
1,3	$\frac{1}{6}$	1,5
X	40%	

CARTELA 6A

	7,10	000 000 000 000 000 000
1,75	$\frac{1}{2}$	0,7
X0000 0X000	35%	

CARTELA 6B

	2/1	
1,10	$\frac{1}{3}$	0,9
	1%	

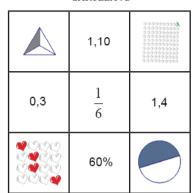
CARTELA 6C

	15,100	
0,10	$\frac{1}{4}$	1,5
X	15%	

CARTELA 7A

	1,75	
0,2	$\frac{2}{3}$	40,100
eeeee eeeee	15%	

CARTELA 7B



CARTELA 7C

	0,10	993999 393999
0,7	$\frac{1}{2}$	2,3
	35%	

CARTELA 8A

	1,00	
1%	$\frac{1}{3}$	0,9
	1,6	

CARTELA 8B

	1,25	
15%	$\frac{1}{4}$	1,5
X Q Q Q Q	3 1	

CARTELA 8C

	1,75	***
40%	$\frac{1}{2}$	0,2
	<u>6</u>	

Os Modelos das cartelas ampliados, para reprodução, estão disponíveis em pdf na versão eletrônica dessa publicação (http://lematec.net/projetorede/).

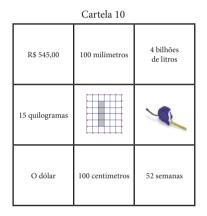
Modelos das Cartelas do Bingo das Grandezas e Medidas

	Cartela 1				Cartela 2	
R\$ 545,00	400 gramas	5 litros		R\$ 2,00	10 gramas	5 mililitros
400 quilogramas		/\\\\		R\$ 0,02		0 12 / 1 / 1 / 1 / 1 / 1 / 1 / 1 / 1 / 1
O centimetro	3 metros	2 meses		O metro	1 milimetro	60 segundos
	Cartela 3		_		Cartela 4	
R\$ 4,00	50 gramas	10 milimetros		R\$ 10,00	150 gramas	3 colheres de chá
50 quilogramas				360 segundos		0
O milimetros	1 centimetro	60 minutos		A polegada	2 centimetros e meio	3600 segundos
	Cartela 5				Cartela 6	
R\$ 50,00	Meio quilogramas	240 mililitros		R\$ 70,00	500 gramas	Meio litro
15 metros				2 litros		200
O pé	15 centimetros	7 dias		O palmo	16 centimetros	63 dias

Cartela 7				
R\$ 200,00	1 quilograma	1000 mililitros		
20 milímetros		NAME OF THE PARTY		
O passo	20 centimetros	2 meses		

Cartela 8			
R\$ 200,00	2 quilograma	5 litros	
13		2 gramas	
O Real	50 centimetros	9 semanas	

Cartela 9				
R\$ 300,00	30 semanas	250 litros		
3 quilogramas				
O centavo	Meio metro	365 dias		



Cartela 11				
R\$ 1000,00	30 gramas	4 bilhões de litros		
30 quilogramas		/WM		
O Euro	100 milímetros	5 anos		

Cartela 12					
R\$ 1000,00	135 metros	250 litros			
260 quilogramas					
O Peso argentino	135 centímetros	12 anos			

Cartela 13

R\$ 300,00	50 dias	5 litros	
100 quilogramas			
O Grama	2 metros	50 anos	

Cartela 14

R\$ 200,00	3 milímetros	1000 milímetros
12 mil toneladas		
O quilograma	3 metros	Meio século

Cartela 15

R\$ 70,00	R\$ 0,70	Meio litro
240 mil toneladas		
A tonelada	11 metros	450 anos

Cartela 16

R\$ 50,00	240 toneladas	240 mililitros
240 mil toneladas		20 20 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10
O litro	1000 metros	450 anos

Cartela 17

R\$ 10,00	12mil toneladas	15 mililitros	
3000 quilômetros			
O mililitros	R\$ 0,10	50 anos	

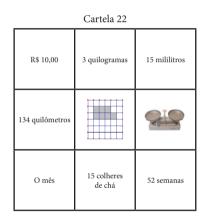
Cartela 18

R\$ 4,00	1000 quilogramas	10 mililitros	
3 mil quilômetros			
A xícara	R\$ 0,04	Meio século	

Cartela 19					
R\$ 2,00	260 quilogramas	5 mililitros			
7 mil quilômetros					
A colher de chá	260 toneladas	12 anos			

Cartela 20						
R\$ 2,00	30 quilogramas	5 mililitros				
7000 quilômetros						
A colher de sopa	5 meses	5 anos				

Cartela 21					
R\$ 4,00	15 quilogramas	10 mililitros			
40 quilômetros					
O ano	40 metros	365 dias			



Cartela 23						
R\$ 50,00	2 quilogramas	240 mililitros				
209 quilômetros		7				
A semana	R\$ 0,50	63 dias				



	Cartela 25			Cartela 26		
R\$ 200,00	500 gramas	1000 mililitros	R\$ 300,00	Meio quilograma	5 litros	
		300 metros			2 quilogramas	
O minuto	3 quilômetros	9 semanas	O segundo	2 metros	7 dias	
	Cartela 27			Cartela 28		
R\$ 545,00	400 gramas	250 litros	R\$ 1000,00	150 gramas	4 bilhões de litros	
1		135 metros			1000 centimetros	
O semestre	135 centímetros	60 minutos	A década	100 centímetros	3600 segundos	
	Cartela 31			Cartela 32		
R\$ 2,00	10 gramas	5 litros	R\$ 10,00	1 quilograma	Meio litro	
		10 quilogramas	hiddi		R\$ 0,10	
O século	Meio metro	60 segundos	O metro quadrado	15 centímetros	7 dias	

(Footnotes)

- 1 Uma quantidade é dita contínua quando teoricamente pode-se dividi-la em partes sempre divisíveis, quando não há unidades separadas umas das outras. Tomando o exemplo acima, a área de uma figura representa uma quantidade contínua.
- 2 Uma quantidade é discreta quando se constitui de unidades separadas e indivisíveis.

Jogos com Sucata na Educação Matemática



Rua Acadêmico Hélio Ramos, 20 - Várzea Recife / PE CEP: 50.740-530 Fax: (0xx81) 2126.8395 Fones:(0xx81) 2126.8397 2126.8930 www.ufpe.br/editora - livraria@edufpe.com.br - editora@ufpe.br

NEMAT Núcleo de Educação Matemática Centro de Educação UFPE 2013

Copyright Organizadores
Copyright NEMAT-UFPE

PROJETO REDE - Formação docente : Interdisciplinaridade e

ação docente

Coordenação: Ana Cláudia Gonçalves Vice-Coordenação: Rosinalda Teles

SUBPROJETO - Elaboração de Material e formação para o trabalho com elaboração e uso de jogos e materiais concretos para a aprendizagem da matemática a partir de sucatas e materiais de baixo custo

Coordenação: Verônica Gitirana

FINANCIAMENTO

FDE - Fundação Nacional de Desenvolvimento Educacional

PROMOÇÃO

NEMAT - Núcleo de Educação Matemática

CEEL - Centro de Estudos em Educação e Linguagem

UFPE - Universidade Federal de Pernambuco









